الفصل الأول

المنطق الرياضي Mathematical Logic

العبارات المنطقية Logical Statements

هي جملة خبرية ذات معنى واضح وتكون اما صائبة أو خاطئة ولا يمكن ان تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد . مثل :

$6 = 3\times2$ عبارة صائبة (True) ويرمز لها T

$5 > 7$ عبارة خاطئة (False) ويرمز لها F

$4+5 = 10$ عبارة خاطئة F

العدد 8 عدد أولي عبارة خاطئة F

العدد 6 يقبل القسمة على 3 عبارة صائبة T

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
اداة الربط و	$\wedge$
اداة الربط أو	$\vee$
الاقتضاء باتجاهين	$\Leftrightarrow$
الاقتضاء باتجاه واحد	$\Leftarrow$

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
اداة الربط اذا كان .. فان	$\leftarrow$
اداة الربط اذا وفقط اذا	$\leftrightarrow$
التسور الجزئي	$\exists$
التسور الكلي	$\forall$

المنطق الرياضي هو ليس نظرية ولكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات

العبارة المنطقية Logical Statement

في المنطق الرياضي نقسم الجمل الرياضية الى نوعين :-

أ- جملة لاتحمل الينا خبرا معينا .

ب- جملة تحمل الينا خبرا معينا ((جملة خبرية)) .

وان من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ماذا كانت الجملة الخبرية صائبة او خاطئة , ولقد اتفقنا بأن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية اما صائبة او خاطئة ولايمكن ان تكون صائبة او خاطئة في ان واحد .

ولقد علمت انه اذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P وكانت P خاطئة (False) (F) فان نفي P تكون صائبة (True) [T]

العبارة البسيطة

هي العبارة التي تحمل خبرا واحدا . مثل : $2 + 3 = 7$, $5 > 3$, $(4)^2 = 16$

العبارة المركبة

هي العبارة التي تحمل خبرين أو اكثر . مثل : (1) $(3)^2 = 9$ OR $x.x^2 = x^3$

(2) اذا كان المثلث متساوي الاضلاع فأن زواياه متساوية .

نفي العبارة المنطقية

اذا كانت العبارة (P) خاطئة فأن نفيها صائبة . وبالعكس

P	~P
F	T
T	F

ومن المفيد ان نذكر جدولي الصواب لاداتي الربط و ($\wedge$) , او ($\vee$)

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

اداة الربط : (اذا كان ... فان) [If ... then]

هي اداة تستخدم لتكوين العبارة المركبة ويرمز لها ← وهي اداة شرطية

اذا كانت Q,P عبارتين منطقيتين فأنه يرمز للعبارة المركبة لهما بالرمز $P \rightarrow Q$

وتقرأ ((اذا كان P فان Q))

والجدول التالي يوضح عمل هذه الاداة :

P	Q	$P \rightarrow Q$ اذا كان ...فان
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

في هذه الاداة تكون القيم جميعها ((صائبة)) ماعدا اذا كانت المقدمة ((صائبة والتالية ((خاطئة)) فقط

مثال1/ اذكر قيم الصواب للعبارات الاتية :

1- اذا كان $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ فأن $\sqrt{-2} \notin R$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة أيضا .

2- اذا كان $3 + 5 = 8$ فان $2 + 6 = 7$

الحل / العبارة خاطئة لان المقدمة صائبة والتالية خاطئة .

3- اذا كان $5 + 7 = 11$ فان $6 + 2 = 8$

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة صائبة والتالية صائبة .

4- اذا كان Zero = 1 فان $\sqrt{3}$ عدد نسبي

الحل / العبارة صائبة لان المقدمة خاطئة والتالية صائبة .

اداة الربط : (اذا وفقط اذا) [IF and only IF]

هي اداة شرطية ثنائية ورمزها $\leftrightarrow$ وتكون العبارة المركبة $P \leftrightarrow Q$ صائبة عندما تكون العبارتين المركبتين لها صائبتين معا أو خاطئتين معا .
هذه العبارة المركبة تسمى ((عبارة شرطية ثنائية)) فمثلا المثلث المتساوي الاضلاع قياس زواياه متساوية وكذلك اذا كانت قياسات زوايا المثلث متساوية كان المثلث متساوي الاضلاع .
هذه العبارة المركبة هي $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ ويرمز لها بالرمز $P \leftrightarrow Q$ او $Q \leftrightarrow P$
وتقرأ (P اذا وفقط اذا Q) او (Q اذا وفقط اذا P) والجدول التالي يوضح عمل الاداة المركبة $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ $P \longleftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

أي ان $P \leftrightarrow Q$ تكون صائبة في حالتين هما :
اذا كانت كل من العبارتين المركبتين اما صائبتين او خاطئتين معا

مثال 2 / أ - $X^2-3X-4=0 \longleftrightarrow X=-1, X=4$
ب- $X=-2 \longleftrightarrow X^5=-32$

[1 - 4] الاقتضاء Impaction

عندما تكون اداة الربط ➔ صائبة دائما فتكتب $P \Rightarrow Q$ (P تقتضي Q)
سنوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الاتيتين :

الحالة الاولى / الاقتضاء في اتجاه واحدة والذي يرمز له $\Rightarrow$
لنرمز : ((X=3)) بالرمز P ولنرمز : (($X^2=9$)) بالرمز Q
فاذا كانت X=3 صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $X^2=9$ أي : $P \Rightarrow Q$
اما اذا كانت $X^2=9$ فان $X = 3$ أي : $Q \not\Rightarrow P$

الحالة الثانية / عندما تكون اداة الربط $\leftrightarrow$ صائبة فتكتب $P \Leftrightarrow Q$
وهذا لايتم الا اذا كانت العبارتين صائبتين معا أو خاطئتين معا .
الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يرمز له $\Leftrightarrow$
لنرمز ((X=3)) بالرمز P ولنرمز (($X^3=27$)) بالرمز Q
فاذا كانت X=3 صائبة فان هذا يقتضي ان تكون $X^3=27$ أي: $P \Rightarrow Q$
واذا كانت $X^3=27$ صائبة فان هذا يقتضي ان تكون X=3 أي: $Q \Rightarrow P$

ان $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ يعني ان $P \Leftrightarrow Q$

مثال 3 / اختر احد الرمزين $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ لوضعه بين التعبيرين في الحالات الاتية لتصبح العبارة صحيحة :-

أ- $X=2, X^3=8$

ب- $X>2, X>5$

جـ- $X^2 \geq 0, X \leq 0$

د – P : أ ب ج د شكل رباعي قطراه متناصفان , Q : أ ب ج د متوازي اضلاع

الحل / أ- $X=2 \Leftrightarrow X^3=8$

ب - $X>5 \Rightarrow X>2$

جـ - $X \le 0 \Rightarrow X^2 \ge 0$

د- $P \Leftrightarrow Q$

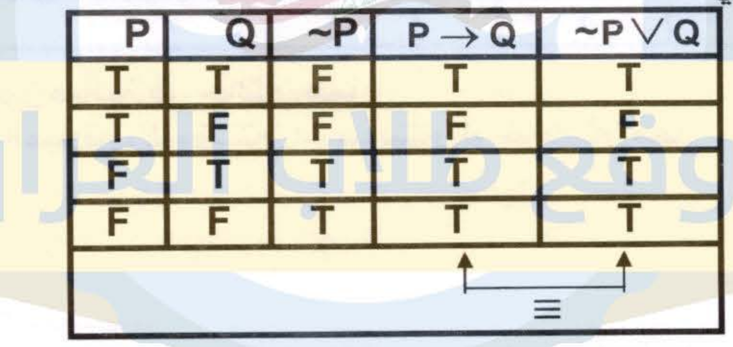
العبارتان المتكافئتان Equivalent Statements

تعريف [1 – 1]

يقال ان العبارة P مكافئة للعبارة Q اذا كان لها نفس جدول الصواب ويرمز لها بالرمز

مثال4 / اثبت ان $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

الحل / نعمل الجدول الاتي :



P	Q	~P	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T
			↑	↑
			≡	

حلول تمارين (1 – 1)

س1/ بين ايا من العبارت التالية صائبة وايا منها خاطئة مع السبب :

أ- العدد 5 يقسم العدد 25 و العدد 7 يقسم العدد 25

الحل/ ((صائبة))T $\wedge$ ((خاطئة))F = F (خاطئة)

ب- العدد 5 يقسم العدد 25 او العدد 7 يقسم العدد 25

الحل/ ((صائبة)) T $\vee$ ((خاطئة)) F = T (صائبة)

جـ- العدد 7 ليس أوليا او العدد 4 أوليا

الحل/ ((خاطئة))F $\vee$ ((خاطئة)) F = F (خاطئة)

د- قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الاضلاع متناصفان

الحل/ ((صائبة)) T $\wedge$ ((صائبة)) T = T (صائبة)

هـ- قطرا المربع متعامدان او قطرا المستطيل متعامدان

الحل/ ((صائبة)) T $\vee$ ((خاطئة)) F = T (صائبة)

س2/ استخدم ⇔ او ⇐ للربط بين العبارتين في الجدول الاتي

لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة

العبارة Q	الرمز	العبارة P
قطرا الشكل الرباعي يتناصفان	$\Leftarrow$	الشكل الرباعي مستطيل
اضلاع الشكل الرباعي متطابقة	$\Leftarrow$	الشكل الرباعي معين
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم	$\Leftrightarrow$	الشكل الرباعي مستطيل
$a = 0 \lor b = 0$	$\Leftrightarrow$	$a,b = 0\ ,\ a,b \in R$
$X^2 = 9$	$\Leftarrow$	$X = -3$
الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم	$\Leftarrow$	الشكل الرباعي مربع
$X = 5$	$\Rightarrow$	$X^2 = 25$
$X = -5$	$\Leftrightarrow$	$X^3 = -125$
أ ب جـ مثلث متساوي الساقين	$\Leftarrow$	أ ب جـ مثلث متساوي الاضلاع
$(X-1)(X-2)=0$	$\Leftrightarrow$	$X = 1 \lor X = 2$

س3/ برهن ان :

-1 $P \to Q \equiv \sim Q \to \sim P$

P	Q	$P \to Q$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \to \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$\equiv$

-2 $\sim(P \to Q) \equiv P \land \sim Q$

P	Q	$\sim Q$	$(P \to Q)$	$\sim(P \to Q)$	$P \land \sim Q$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

$\equiv$

س4/ اذا كانت p صائبة , Q صائبة , S خاطئة فأي العبارات التالية خاطئة وايها صائبة .

-1 $S \vee (P \rightarrow Q)$ — (F) , (T) صائبة

-2 $P \wedge (P \leftrightarrow S)$ — (T) , (F) خاطئة

-3 $P \wedge (S \leftrightarrow Q)$ — (T) , (T) صائبة

-4 $S \vee (S \leftrightarrow S)$ — (F) , (T) صائبة

س5/ ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحية فيما يلي :-

S,Q,P ثلاث عبارات اعتمدت في الاسئلة التالية :

-1 $P \rightarrow \sim P$ تكافئ

أ- $P \rightarrow P$ ب- $\sim P \rightarrow P$ **[جـ- $\sim P$]** د- $\sim P \wedge P$

-2 $S \leftrightarrow S$ عبارة

[أ- صائبة دائما] ب- صائبة مرة واحدة جـ- خاطئة دائما د- خاطئة مرة واحدة

-3 نفي العبارة $((3 + 5 > 9)) \sim S \vee$ هو :-

أ- $3 + 5 \geq 9 \vee \sim S$ ب- $3 + 5 < 9 \vee \sim S$

جـ- $3 + 5 \leq 9 \wedge \sim S$ **[د- $3 + 5 \leq 9 \wedge S$]**

[5 – 1] الجمل المفتوحة Open Sentences

عرفنا العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية اما صائبة او خاطئة (وليس الاثنان معا) ولكن اذا لاحظنا الجمل الاتية :

أ– X عدد صحيح اكبر من الصفر والتي نرمز لها بالرمز P(X)

ب – $Y + 1 = 3$ والتي نرمز لها بالرمز Q(Y)

جـ – $a + b = 6$ حيث a,b أعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز G(a,b)

د – ..... احدى مدن العراق .

وجدنا ليس بالامكان القول ان كلا من هذه الجمل تمثل عبارة منطقية . ولكن اذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف X تصبح (9 عدد صحيح اكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة اعط قيمة لـ(Y) في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة . ولو اعطيت كلا من a,b قيمة تساوي 3 نحصل على العبارة $(6 = 3 + 3)$ وهي عبارة صائبة . ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة .

تعريف [2 – 1]

1- المتغير هو رمز يأخذ قيما لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير.

2- الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير او اكثر وتتحول الى عبارة عند اعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض .

[6 – 1] تكافؤ الجمل المفتوحة

هي الجمل التي يكون لها نفس مجموعة الحل في مجموعة تعويض واحدة .

لتكن $P(X) : 2X = 4$

$Q(X) : X - 1 = 1$

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الاعداد الصحيحة (Z) نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة P(X) هي $\{2\}$ وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة Q(X) هي $\{2\}$

تسمى الجملتان المفتوحتان Q(X),P(X) متكافئتين وذلك لتساوي مجموعتي الحل لكل منهما .

مثال5 / اذا كانت $P(X) : X = 2$

$Q(X):X^2=4$ ومجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الاعداد الصحيحة Z .

هل P(X),Q(X) متكافئتان ؟

الحل /

نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المفتوحة P(X) هي $\{2\}$ وان مجموعة الحل للجملة المفتوحة Q(X) هي $\{-2 , 2\}$ وبما ان $\{2\} \neq \{2 , -2\}$

لذا نقول ان الجملتين المفتوحتين Q(X),P(X) جملتان غير متكافئتين .

تعريف [3 – 1]

ان نفي الجملة المفتوحة P(X) هي الجملة المفتوحة ((ليس صحيحا P(X))) او أي جملة مفتوحة تكافئ ذلك وسوف نستعمل الرمز $\sim P(X)$ للتعبير عن نفي الجملة المفتوحة P(X) .

ملاحظة /

نلاحظ ان مجموعة الحل للجملة المنفية هي مجموعة التعويض / مجموعة حل الجملة P(X)

مثال6/ لنفرض ان مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الاعداد الصحيحة Z

الجملة المفتوحة P(X)	نفيها $\sim P(X)$
$X^2 - 4 = 0$	$X^2 - 4 \neq 0$
X عدد صحيح زوجي	X ليس عدداً صحيحاً زوجياً
$X = 4$ و $X + 1 \neq 6$	$X \neq 4$ او $X + 1 = 6$

حلول تمارين (2 – 1)

س1/ مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الاتية :

الجملة المفتوحة	مجموعة التعويض

أ- $X<3$ — الاعداد الطبيعية

الحل / $x=\{0,1,2\}$

ب- $x^2 - 11x + 30 = 0$ — $\{10,6,5,3\}$

الحل / $x^2 - 11x + 30 = 0$

$(x-6)(x-5) = 0$

$S = \{6, 5\}$

جـ- $(x-1)(x-\frac{3}{5})(x-30) = 0$ — الاعداد الصحيحة Z

الحل / $x=1$

$X = \frac{3}{5} \notin Z$

$X = 30$

$S_x = \{1, 30\}$

د- $x > 4$ و $(x-1)(x-5) = 0$ — الاعداد الطبيعية N

الحل / $x > 4 \wedge x = 5$ أو $x = 1$

$x = 5 \wedge x > 4$

$\{1, 5\} \cap \{x: x > 4\}$

$S = \{5,6,7,....\}$

هـ- X لاتقبل القسمة على 4 — $\{10,8,6,4,2\}$

الحل / $S_x = \{2, 6, 10\}$

و- $x + 5 \geq 0$ — الاعداد الصحيحة Z

الحل / $S_x = \{X: X \in Z, X \geq -5\}$

س2/ يوجد في كل مما ياتي زوج من الجمل المفتوحة أي من هذه الازواج يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين مع العلم ان مجموعة التعويض هي Z .

أ- $3x - 5 = x + 7$ و $x - 3 = 3$

$3x - x = 7 + 5$ ∧ $x = 3 + 3$

$2x = 12$ ∧ $x = 6$

$x = \frac{12}{2} \rightarrow x = 6$ ∧ $x = 6$

$S = \{6\}$

الجملتان متكافئتان لان مجموعة الحل لكليهما متساوية

ب- $x^2 = 4$ و $x = 2$

$x = \pm 2$, $x = 2$

$S = \{-2 , 2\}$, $S = \{2\}$

الجملتان غير متكافئتان لان مجموعة الحل غير متساوية

جـ- $x^2 = 9$ و $x = 3$ أو $x = -3$

$x = \pm 3$, $\{-3\} \cup \{3\}$

$S = \{-3 , 3\}$, $S = \{-3 , 3\}$

∴ الجملتان متكافئتان

د- $(x + 1)(2x + 1) = 0$ و $x + 1 = 0$

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$, $x = -1$

$2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1$, $S = \{-1\}$

$x = \frac{-1}{2} \notin Z$

$S = \{-1\}$

∴ الجملتان متكافئتان

هـ- $(x - 1)(x - 5) = 0$ و $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 1$, $(X - 5)(X - 1) = 0$

$x = 5$, $x = 1 \quad x = 5$

$S = \{1 , 5\}$, $S = \{1 , 5\}$

الجملتان متاكفئتان

و- $X = 0$ و X أكبر من 1- وأصغر من 1

$S = \{0\}$, $S = \{0\}$

الجملتان متكافئتان

ز- $3 > x \geq 0$ و $(x - 1)(x - 2) = 0$

$S = \{0 , 1 , 2\}$, $x = 1 , x = 2$

$S = \{1 , 2\}$

الجملتان غير متكافئتان

س3/ انف كل جملة مفتوحة من الجمل الاتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية مع العلم ان مجموعة التعويض هي المجموعة $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5\}$

الجملة المفتوحة	نفي الجملة المفتوحة
أ- $2x = 4$	$2x \neq 4$ يعني ← $x = \{1,3,4,5\}$
ب- $x + 4 = 7$	$x + 4 \neq 7$ يعني ← $x = \{1,2,4,5\}$
جـ- $(x - 3)(x - 4) = 0$	$x \neq 3 , x \neq 4$ يعني ← $x = \{1,2,5\}$

الجملة المفتوحة	نفي الجملة المفتوحة
د- $x^2 \neq 9$ و $x+2 = 4$	$x^2 = 9$ أو $x + 2 \neq 4$

الحل/

$x = \pm 3$ أو $x \neq 4 - 2$

$x = \pm 3$ أو $x \neq 2$

$\{1,3,4,5\} \cup \{3\}$ لان (-3) لاتنتمي الى مجموعة التعويض

$S = \{1,3,4,5\}$

	الجملة المفتوحة	نفي الجملة المفتوحة
هـ -	$x^2 = 16$ أو $x - 1 = 4$	$x^2 \neq 16$ و $x - 1 \neq 4$
		الحل /
		$x \neq \pm 4$ و $x = 4 + 1$
		$x \neq \pm 4 \cap x \neq 5$
	لان $(-4) \not\ni$ مجموعة التعويض	$\{1,2,3,5\} \cap \{1,2,3,4\}$
		$S = \{1,2,3\}$

س4/ اذا علمت ان x,y عناصر في المجموعة $\{0,1,2,.........................,9\}$

فأكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة الاتية على شكل ازواج مرتبة .

أ- $x - y = 3$

$x = 3 + y$

عندما $y=0$ فان $x = 3 + 0 = 3$

عندما $y=1$ فان $x = 3 + 1 = 4$

عندما $y=2$ فان $x = 3 + 2 = 5$

∴ الازواج المرتبة هي

$\{(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),(7,4),(8,5),(9,6)\}$

ب- $x + y = 15$

$x = 15 - y$

عندما $y=0$ فان $x = 15$

عندما $y=1$ فان $x = 14$

عندما $y=6$ فان $x = 15 - 6 = 9$

∴ الازواج المرتبة هي

$\{(9,6),(8,7),(7,8),(6,9)\}$

[1 – 7] العبارات المسورة Quantifiered Propositions

[1 – 7 – 1] العبارات المسورة كليا والعبارات المسورة جزئيا

يحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكنا الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليها وسنقدم هنا رمزين منطقيين هامين :

اولا / العبارات المسورة كليا

هي الجملة المفتوحة التي يسبقها $\forall$ أو مهما كان بحيث يجعل الجملة عبارة صائبة

اذا اردنا ان نذكر ان كل عنصر من مجموعة A يجعل F(X) عبارة صائبة فاننا نقول ((مهما كان a من A فان F(a) عبارة صائبة)) .

او ((لكل $a \in A$ يكون F(a) عبارة صائبة))

ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو التالي :

$\forall\ a \in A$ فان F(a) عبارة صائبة

يسمى الرمز $\forall$ سورا كليا (دلالة الشمول) او المسور الكلي وتسمى العبارة

$\forall\ a \in A$ فان F(a) عبارة صائبة

مثلا / $(X + 1)^2 = X^2 + 2x + 1$ صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان X

ويمكن كتابتها كما يأتي :

$\forall X \in N$ فان $(X + 1)^2 = X^2 + 2x + 1$

ملاحظة 1 / المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض

مثل / $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$ ، $x^3 + 27 = (x-3)(x^2-3x+9)$

ثانيا / العبارات المسورة جزئيا

اذا اردنا ان نذكر ان بعض عناصر مجموعة A تجعل G(x) عبارة صائبة فاننا نقول :

((يوجد في الاقل عنصر من A يجعل G(x) عبارة صائبة))

ونكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالاتي :

$\exists\ b \in A$ بحيث G(b) عبارة صائبة (دلالة الوجود)

يسمى الرمز $\exists$ سورا جزئيا وتسمى العبارة

$\exists\ b \in A$ فان F(b) عبارة مسورة جزئيا

فاذا اردنا

مثلا ان نقول ان للمعادلة X + 1 = 2 حلا في مجموعة الاعداد الصحيحة Z كتبنا :

$\exists X \in Z$ بحيث $X + 1 = 2$

ونذكر ماتقدم بقولنا :

((يوجد في الاقل عنصر $X \in Z$ بحيث تكون المعادلة X + 1 = 2 محققة))

ملاحظة 1 / المتطابقة هي عبارة مسورة كليا أي انها صائبة .

لكل X ينتمي الى مجموعة التعويض . مثل : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

ملاحظة 2 / المعادلة والتباينة هي عبارات مفتوحة مسورة جزئيا اي انها صائبة لقيم محددة للمتغير من مجموعة التعويض

مثال / $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ فالعدد (2) فقط يحقق هذه المعادلة ويجعلها صائبة .

مثال / $x < 3 \ , \ x \in N$

مجموعة الحل $S = \{0,1,2\}$

هذه القيم فقط تحقق هذه المتباينة

[2 – 7 – 1] نفي العبارات المسورة

عندما نريد نفي العبارت المسورة ننتبه الى الاتي :

((ان كل عبارة يجب ان تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين : صائبة أو خاطئة))

- فلو اردنا مثلاً نفي العبارة :

((مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فان العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه))

فاننا نقول :

((يوجد في الاقل وتر واحد مرسوما في هذه الدائرة بحيث ان العمود النازل عليه من مركزها لا ينصفه))

- واذا اردنا اثبات خطأ القول :

((كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6)) فانه يكفي ان نبرهن صواب القول :

((يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6))

$\sim[\ \forall x \in X$ فان $P(x)\ ] \equiv \exists x \in X$ فان $\sim P(x)$
$\sim[\ \exists x \in X$ فان $P(x)\ ] \equiv \forall x \in X$ فان $\sim P(x)$

مثال7 / انف كلا مما ياتي :

-1 $\forall x$ فان $P(X)$ حيث ان : $P(X)$: اذا كان X عددا طبيعيا فان $X>0$

الحل/

$\sim[\forall x$ فان $P(X)] \equiv \exists x$ فان $\sim P$

$\sim P(X)$: $\exists x$ عدد طبيعي حيث $X \le 0$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي اصغر او يساوي صفرا

-2 $\exists x$ فان $P(X)$ حيث ان : $P(X)$: X عدد زوجي موجب

الحل/

$\sim[P(X)$ فان $\exists x] \equiv \sim P(X)$ فان $\forall x$

$\sim P \wedge (X + 3 < 5 : \forall X \in R)$

عددا زوجيا فان X غير موجب وبالكلام :

مهما يكن X عددا زوجيا فان X غير موجب

-3 $P \vee \exists X \in R : x+3 \geq 5$

$\sim P \wedge (x + 3 < 5 , \forall x \in R)$

-4 $x \in R : (x + 3)^2 = x^2 + 6x +9$

يكون نفيها $\exists x \in R: (x + 3)^2 \neq x^2 + 6x +9$

-5 $\forall x \in N$ يقبل القسمة على 2 قبل القسمة على 8

$\exists x \in N$ يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 8

-6 $\forall x \in N: x > 0$

$\exists x \in N: x \leq 0$

ملاحظة / 1- اذا كانت العبارة المسورة (صائبة) فأن نفيها (خاطئة) وبالعكس .

-2 اذا كانت العبارة المسورة كليا (صائبة) فأن تسويرها الجزئي (صائبة) والعكس غير صحيح . كما في المثالين

مثال1 / $\forall x \in R: x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ وهي عبارة مسورة كليا (صائبة)

$\exists x \in R: x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ وهي عبارة مسورة جزئيا (صائبة)

مثال2 / $\exists x \in N: x > 5$ هي عبارة مسورة جزئيا (صائبة)

لكن $\forall x \in N: x > 5$ هي عبارة مسورة كليا (خاطئة)

[3 – 7 – 1] التحصيل الحاصل Tautology

اذا كان لدينا العبارة المنطقية P وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فان P تسمى تحصيلا حاصلا .

مثال 8/ لتكن P عبارة هل $P \vee \sim P$ تشكل تحصيلا حاصلا

الحل /

P	~P	P ∨ ~P
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلا حاصلا

ملاحظة /

اذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction)

حلول تمارين (3 – 1)

س1/ انف كل عبارة من العبارات الاتية من دون استعمال ليس صحيحا بدلها :-

أ- جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين ← خاطئة

نفيها : بعض المثلثات المتشابهة مختلفة الاضلاع ← صائبة

ب - بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة ← صائبة

نفيها : كل المثلثات المتشابهة متطابقة ← خاطئة

جـ - اذا كان المثلث قائم الزاوية فانه يكون متساوي الساقين ← خاطئة

نفيها : يوجد في الاقل مثلث واحد قائم الزاوية وغير متساوي الساقين ← صائبة

د - بعض المعادلات ليس لها حل ← صائبة

نفيها : كل المعادلات لها حل ← خاطئة

هـ- كل شكل رباعي مستطيل ← خاطئة

نفيها : يوجد في الاقل شكل رباعي واحد ليس مستطيل ← صائبة

و- $Q : \forall x \in N \quad : x^2 = 25$

نفيها : $\exists x \in N \quad : x^2 \neq 25$

ح- $(\forall x \in R : x < 8) \wedge P$

نفيها : $(\exists x \in R : x \geq 8) \vee \sim P$

س2/ بين صواب او خطأ كل من العبارت التالية :

أ- $\forall x$ ، فان $P(x)$ حيث ان :

$P(x)$: اذا كان x عددا طبيعيا فان $x^2 = x$ خاطئة

ب- $x \; \exists$ فان $P(x)$ حيث ان :

$P(x)$: x عدد طبيعي ، $x^2 = x$ صائبة

جـ- $\forall x$ فان $P(x)$ حيث ان :

$P(x)$ اذا كان x عددا سالبا فان x^2 عدد موجب. صائبة

د- $Q \; , \; P$ عبارتان منطقيتان : $Q \wedge P \rightarrow Q$ تحصيل حاصل صائبة

هـ- P عبارة : $P \wedge \sim P$ تناقض. صائبة

و- $P \; , \; Q$ عبارتان منطقيتان : $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ تحصيل حاصل صائبة

اسئلة حول الفصل الاول

س1/ برهن ان :

a/ $\sim(\sim b \vee \sim c) \equiv \sim(\sim b) \wedge \sim(\sim c)$

b/ $a \wedge (\sim a \vee b) \equiv a \wedge b$

c/ $(b \vee \sim c) \longrightarrow b \equiv (\sim b \wedge c) \vee b$

س2/ جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية حيث $x,y \in N$:

a/ $5x + y = 15$

b/ $x + 5y = 15$

c/ $3x + y = 8$

س3/ جد مجموعة حلول العبارات المفتوحة التالية

a/ $2x - 7 < 0$

حيث مجموعة التعويض ① Z^+ ② $\{0, 1, 2, 3\}$ ③ Q

b/ $(x > 3) \wedge (\in \{x\ 3,5,7,9,11\})$

c/ $(x < 3) \wedge (x \in Z^+)$

d/ $(2x - 3 > 0) \wedge (\{x \in \{2,4,6\})$

الفصل الثاني

حقل الاعداد الحقيقية Field of Real Numbers

[2 – 7] القيمة المطلقة Absolute Value:

تعريف [2 – 15]

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي X والتي نرمز لها بالرمز | X | كما يلي :

$$|X| = \begin{cases} X, & \forall X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -X, & \forall X < 0 \end{cases}$$

مثال1/ عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما يأتي :

أ / $|3-\sqrt{10}|$ حيث $X \in R$

الحل / لان $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$\therefore |3-\sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 > 0$

ب / $|X - 3|$ حيث $X \in R$

الحل /

$$|X-3| = \begin{cases} X-3, & \forall X > 3 \\ 0, & X = 3 \\ -X+3, & \forall X < 3 \end{cases}$$

ملاحظة/ $\sqrt{x^2} = + |X|$ اي ان القيمة المطلقة لاي عدد حقيقي هو الجذر التربيعي الموجب لمربع ذلك العدد

ينتج من التعريف (15 – 2) ان القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الاتية :

(1) $\forall X \in R$ فان $|X| \geq 0$

(2) $\forall X \in R$ فان $|-X| = |X| = |-X|$

(3) $\forall X \in R$ فان $-|X| \leq X \leq |X|$

(4) $|X|^2 = X^2 \,, \forall X \in R$

(5) $\forall X \in R$ فان $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$ ، $\left|\frac{X}{Y}\right| = \frac{|X|}{|Y|}$ حيث $Y \neq 0$

(6) $\forall X, Y \in R$ فان $|X + Y| \leq |X| + |Y|$

(7) $\forall a > 0 \; X \in R$ اذا كان $|X| \leq a$ فان $-a \leq X \leq a$

ملاحظة / اعط لكل من X,Y قيما عددية وتأكد من صحة الخواص بنفسك

مثال2/ ارسم $Y = |X|$

الحل / حسب تعريف (15 – 2)

$$y = \begin{cases} X & , \forall X > 0 \\ 0 & , X = 0 \\ -X & , X < 0 \end{cases}$$

اولا / المستقيم $x > 0 , Y = X$

X	Y	(x , y)
0	0	(0 , 0)
1	1	(1 , 1)
2	2	(2 , 2)

ثانيا / المستقيم $X < 0 , Y = -X$

X	Y	(x , y)
0	0	فجوة (0 , 0)
-1	1	(-1 , 1)
-2	2	(-2 , 2)

مثال3/ ارسم $Y = |X - 1| + 3$

الحل / حسب تعريف (15 – 2)

$$y = \begin{cases} (X-1)+3 & , \forall X \geq 1 \\ (-X+1)+3 & , \forall X < 1 \end{cases}$$

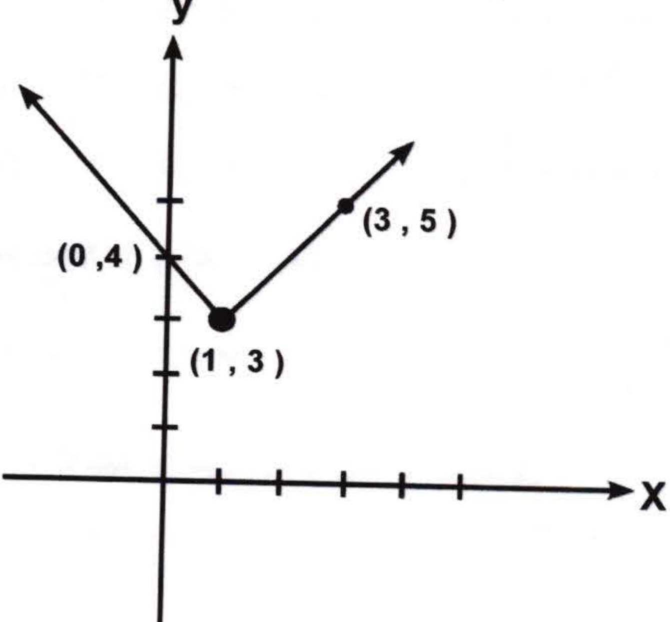
$$\therefore y = \begin{cases} X+2 & , \forall X \geq 1 \\ -X+4 & , \forall X < 1 \end{cases}$$

اولا / المستقيم $\forall X > 1 , Y = X + 2$

X	Y	(x , y)
1	3	(1 , 3)
3	5	(3 , 5)

ثانيا / المستقيم $\forall X < 1 , Y = -X + 4$

X	Y	(x , y)
1	3	فجوة (1 , 3)
0	4	(0 , 4)



[8 – 2] حل المعادلات التي تحتوي على مطلق

مثال4/ جد مجموعة الحل للمعادلة : $|3X + 6| = 9$ حيث $X \in R$

الحل / نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي ان :

$$|3X + 6| = \begin{cases} 3X + 6 & \text{اذا كان } 0 \le 3X + 6 \text{ اي } X \ge -2 \\ -(3X + 6) & \text{اذا كان } 0 > 3X + 6 \text{ اي } X < -2 \end{cases}$$

ان هذه المعادلة تكافئ النظام :

$3X + 6 = 9$ مجموعة التعويض هي $\{X : X \ge -2\}$ .... (1)

$-3X - 6 = 9$ مجموعة التعويض هي $\{X : X < -2\}$ .... (2)

يمكننا ان نعد هذا النظام نظام معادلتين بالمتغيرين x,y حيث معامل y فيها يساوي الصفر

ان مجموعة حل هاتين المعادلتين هي :

$$S_1 = \{1\} \ , \ S_2 = \{-5\}$$

$\therefore$ مجموعة حل النظام هي $S = S_1 \cup S_2 = \{1 , -5\}$

مثال5/ جد مجموعة حل المعادلة : $X^2|X| - 8 = 0 \ , \ \forall X \in R$

الحل /

من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $X^2|X| - 8 = 0$ تكافئ النظام :

$X^3 - 8 = 0 \ , \ \forall X \ge 0 \Rightarrow X^3 = 8 \Rightarrow X = 2$

$$S_1 = \{2\}$$

$-X^3 - 8 = 0 \ , \ \forall X < 0 \Rightarrow X^3 = -8 \Rightarrow X = -2$

$$S_2 = \{-2\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{2 , -2\}$$

مثال6/ جد مجموعة حل المعادلة : $X^2 + |X| - 12 = 0 \ , \ \forall X \in R$

الحل /

من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $X^2 + |X| - 12 = 0$ تكافئ النظام :

$X^2 + X - 12 = 0 \ , \ \forall X \ge 0 \Rightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$

اما $X = -4$ يهمل اذن $X = 3$

$$\therefore S_1 = \{3\}$$

$X^2 - X - 12 = 0 \ , \ \forall X < 0 \Rightarrow (X - 4)(X + 3) = 0$

أو $X = 4$ يهمل اذن $X = -3$

$$\therefore S_2 = \{-3\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{3 , -3\}$$

[9 – 2] حل معادلتين اثنتين بمتغيرين

لقد تعلم الطالب حل نظام مؤلف من معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين بيانيا . وحينذاك وضحنا الاتي
اذا كان S_1 حلا للمعادلة الاولى , S_2 حلا للمعادلة الثانية , فان مجموعة حل النظام $S = S_1 \cap S_2$
اذا كانت المعادلتين مربوطتين باداة الربط (و)
اما اذا كان الربط (او) فان حل النظام هو $S = S_1 \cup S_2$.

مثال7/ اذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من X,Y فجد مجموعة الحل بطريقتين :
تحليليا و بيانيا ؟

$X - 2Y = 5$ ...... (1)

$2X + Y = 0$ ..... (2)

الحل /

تحليلياً : بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 :

$X - 2Y = 5$ ..... (1)

$4X + 2Y = 0$ ..... (2) بالجمع

$5X = 5 \Rightarrow X = 1$

نعوض في (1)

$1 - 2Y = 5$

$\Rightarrow Y = -2$

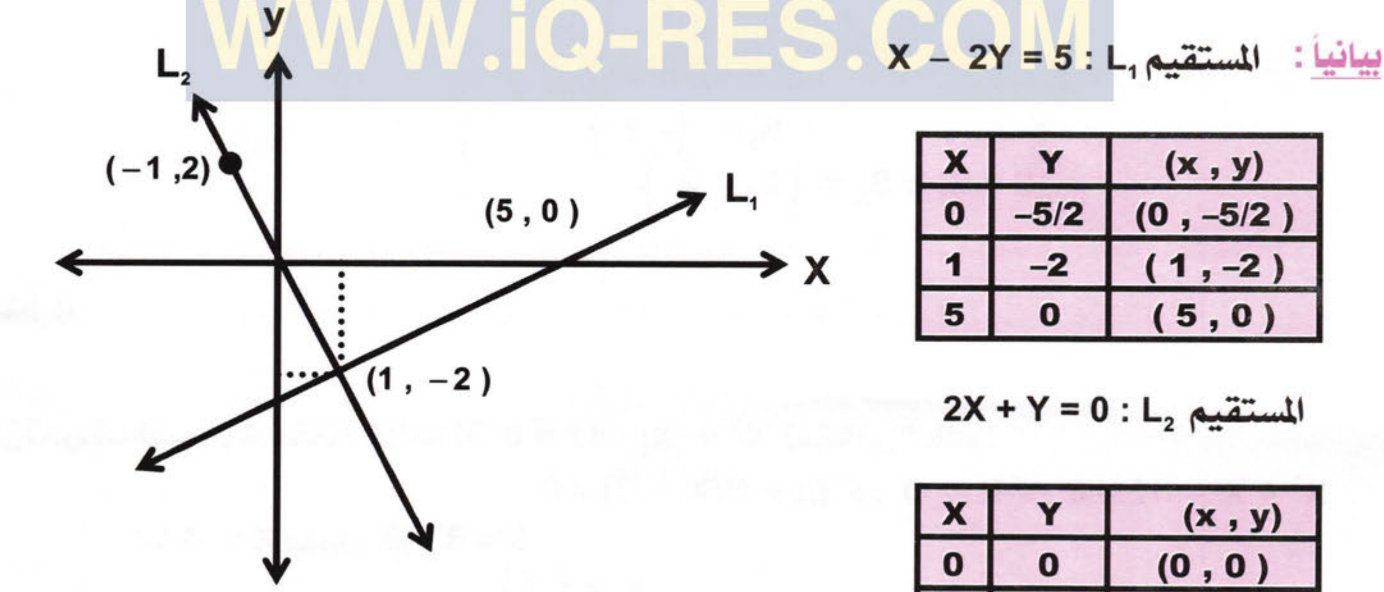
∴ مج = $\{(1 , -2)\}$ وهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين

بيانياً : المستقيم $L_1 : X - 2Y = 5$

X	Y	(x , y)
0	–5/2	(0 , –5/2)
1	–2	(1 , –2)
5	0	(5 , 0)

المستقيم $L_2 : 2X + Y = 0$

X	Y	(x , y)
0	0	(0 , 0)
1	–2	(1 , –2)
–1	2	(–1 , 2)



مثال8/ اذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من y , x فجد مجموعة حل النظام

$$x - y = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 = 13$$

الحل /

$x - y = 1$ ---------------- (1

$x^2 + y^2 = 13$ ---------------- (2

نكون معادلة جديدة هي معادلة رقم (3) من معادلة رقم (1)

$x = 1 + y$ ---------------- (3

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (2)

$(1+y)^2 + y^2 = 13$

$1 + 2y + y^2 + y^2 = 13$

$2y^2 + 2y + 1 - 13 = 0$

$\left[2y^2 + 2y - 12 = 0\right] \div 2$

$y^2 + y - 6 = 0$

$(y+3)(y-2) = 0$

اما $(y+3) = 0 \rightarrow y = -3$

أو $(y-2) = 0 \rightarrow y = 2$

نعوض قيم y في معادلة رقم (3) لايجاد قيم x

اما $x = 1 + (-3) \rightarrow x = 1 - (3) \rightarrow x = -2$

أو $x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$

$\therefore S = \{(-2, -3), (3, 2)\}$

مثال9/ حل المثال الاتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من y , x بطريقة الحذف

$$2X^2 - 3y^2 = -46 \quad , \quad X^2 + y^2 = 17$$

الحل /

$X^2 + y^2 = 17$ ---------------- (1

$2X^2 - 3y^2 = -46$ ---------------- (2

بضرب معادلة رقم (1) في العدد (3)

$3X^2 + 3y^2 = 51$ ---------------- (1

$2X^2 - 3y^2 = -46$ ---------------- (2

بالجمع

$5X^2 = 5$

$X^2 = \frac{5}{5} \rightarrow X^2 = 1 \rightarrow X = \mp 1$

نعوض قيمة X في معادلة رقم (1) لايجاد قيمة y

$(1)^2 + y^2 = 17$

$y^2 = 17 - 1 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \mp 4$

$\therefore \ S = \{(1, -4), (1, 4), (-1, -4), (-1, 4)\}$

الخلاصة :

(1) اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانية) فتحل بطريقتين

★ طريقة الحذف ★ طريقة التعويض

(2) اذا كانت احدهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة التعويض

[2 - 10] الفترات Intervals:

ليكن $a, b \in R \ , \ a < b$

(1) تسمى مجموعة الاعداد الحقيقية :

$\{X : X \in R , a \le X \le b\}$ الفترة المغلقة Closed Intervals من a الى b ونرمز لها بالرمز [a , b] وتمثل على خط الاعداد كما في الشكل (1 - 2) حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (a) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (b) لقد اهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الاصل (و) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى الفترة [a , b] ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة a b .

a b

الشكل (1 - 2)

(2) نسمي المجموعة

$\{X : X \in R , a < X < b\}$ = الفترة المفتوحة Open Intervals من (a) الى (b)

وتمثل على خط الاعداد الحقيقية كما في الشكل (2 – 2) .



الشكل (2 – 2)

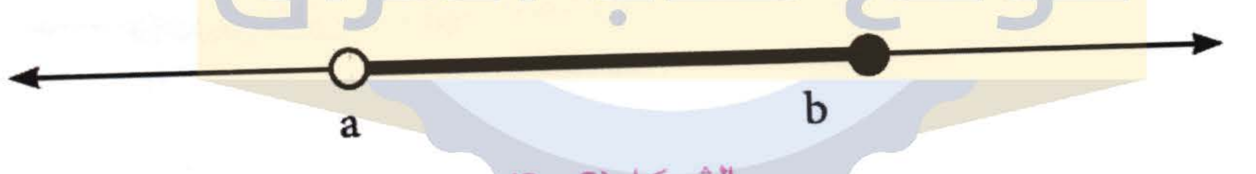
يلاحظ في هذه الحالة ان $a \notin (a , b)$, $b \notin (a , b)$ والدائرتين حول العددين a , b في الشكل تدلان على ذلك .

(3) نسمي كلا من :

$(a , b] = \{X : X \in R , a < X \le b\}$

$[a , b) = \{X : X \in R , a \le X < b\}$

الفترة نصف المغلقة (او نصف المفتوحة Half Open) حيث a < b وتمثل المجموعة الاول كما في الشكل (3 – 2) .



الشكل (3 – 2)

وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (4 – 2)

الشكل (4 – 2)

(4) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد على العدد الحقيقي (a) او تساويه هي :

$\{X : X \in R , X \ge a\}$ وتمثلها كما في الشكل (5– 2)

الشكل (5 – 2)

كما ان المجموعة $\{X : X \in R , X > a\}$ يمثلها الشكل (6 – 2)

الشكل (6 – 2)

(5) مجموعة الاعداد الحقيقية التي تساوي العدد الحقيقي (a) او الاصغر منه هي

$\{X : X \in R , X \leq a\}$ فيمثلها الشكل (7 – 2)

الشكل (2 – 7)

a

اما المجموعة $\{X : X \in R , X < a\}$ فيمثلها الشكل (8 – 2)

الشكل (2 – 8)

a

ملاحظة / المجموعة في (4) و (5) تدعى مجموعات عددية غير محددة (شعاع)

مثال1/ لتكن $X = [1 , 6] , Y = [3 , 8]$ مثل على خط الاعداد :

(1) $X \cap y$ الحل $X \cap y = [3 , 6]$

(2) $X \cup y$ الحل $X \cup y = [1 , 8]$

(3) $X - y$ الحل $X - y = [1 , 3)$

(4) $y - X$ الحل $y - X = (6 , 8]$

ثم اكتب الناتج على شكل فترة

1 3 6 8

مثال2/ مثل الاتي :

(1) $\{X : X \geq -3\} \cup (-5 , 2]$ على خط الاعداد

(2) $\{X : X \geq -3\} \cap (-5 , 2]$ على خط الاعداد

الحل /

-5 -3 0 2

$\therefore$ (1) $\{X : X \geq -3\} \cup (-5 , 2] = \{X : X > -5\}$

(2) $\{X : X \geq -3\} \cap (-5 , 2] = [-3 , 2]$

[11 – 2] حل المتباينة (المتراجحة) من الدرجة الاولى في متغير واحد

ان المتباينة التي تحوي متغير (X) والتي تكتب بالشكل : $g(X) < f(X)$ حيث $g(X) , f(X)$ جملتان مفتوحتان تسمى Inequality في متغير واحد (X)

وكما تعلم من دراستك السابقة اذا كانت مجموعة القيم التي اعطيت لـ (X) في هذه المتباينة وجعلها عبارة صائبة , نقول اوجدنا مجموعة حل هذه المتباينة. وتعرف المتباينات المتكافئة كما عرفت المعالات المتكافئة.

تعريف [16 - 2]

نقول عن المتباينة $f(X) < g(X)$ متباينة مكافئة للمتباينة $h(X) < I(X)$ اذا كان لهما مجموعة الحل نفسها

سنهتم في هذا البند بحل المتباينات التي يكون فيها كل من $f(x)$, $g(x)$ كثيرة الحدود

مثال1/ جد مجموعة الحل للمتباينة: $3X + 1 < X + 5$
اذا كانت مجموعة التعويض هي R وضع مجموعة الحل على خط الاعداد .

الحل /

$3X + 1 < X + 5$

$3X + 1 + (-X) < X + 5 + (-X)$

$\Leftarrow$ $2X + 1 < 5$ خواص المتباينات

$\Leftarrow$ $2X + 1 + (-1) < 5 + (-1)$

$\Leftarrow$ $2X < 4$ خواص المتباينات

$\Leftarrow$ $(2X)(\frac{1}{2}) < 4(\frac{1}{2})$ $\Leftarrow$ $X < 2$ خواص الحقل

2

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{X : X \in R , X < 2\}$

اذا ربطنا متباينتين بالرابط [و] فان قيمة X التي تحقق هذا النظام المؤلف من متباينتين من الدرجة الاولى في متغير واحد يجب ان تنتمي الى S_1 مجموعة حل المتباينة الاولى والى S_2 مجموعة حل المتباينة الثانية. اي الى $S_1 \cap S_2$ وهذا يعني :

ان مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرابط [و] هي: $S = S_1 \cap S_2$

ويمكننا ان نستنتج بشكل مشابه ان مجموعة حل النظام المكون من متباينتين والرابط [او] هي: $S = S_1 \cap S_2$

مثال2/ اذا كانت مجموعة التعويض هي (R) جد مجموعة الحل للنظام :
$5X + 11 < 1$ [و] $2X + 3 < 6$ مثل اجابتك على خط الاعداد

الحل / مجموعة الحل للمتباينة الاولى هي $S_1 = \{X : X < -2\}$

مجموعة الحل للمتباينة الثانية هي $S_2 = \{X : X < \frac{3}{2}\}$

مجموعة الحل لنظام المتباينتين هي : S

$$S = S_1 \cap S_2 = \{X : X < -2\} \cap \{X : X < \frac{3}{2}\}$$

$$S = \{X : < -2 \text{ [و] } \frac{3}{2} < X\}$$

-2 $\quad$ $\frac{3}{2}$

العناصر المشتركة بين S_1 , S_2 هي S_1 نفسها $S_1 \cap S_2 = S_1 = \{X : X < -2 , X \in R\}$

مثال3/ عوض الرابط [و] بالرابط [او] في المثال السابق ثم جد مجموعة الحل :

الحل / مجموعة الحل للنظام : $5X + 11 < 1$ او $2X + 3 < 6$

$$S_2 \cup S_1 = \left\{X : X < \frac{3}{2} \;\; \text{او} \;\; X < -2\right\}$$

$$S = \left\{X : X \in R , X < \frac{3}{2}\right\}$$



نلاحظ ان العناصر الموجودة في S_1 او S_2 او في كليهما معا هي S_2 .

مثال4/ اذا كان (R) هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتباينة $|X - 2| > 5$.

الحل /

$$|X - 2| = \begin{cases} X - 2 , \forall X \geq 2 \\ \text{او} \\ 2 - X , \forall X < 2 \end{cases}$$

$$\therefore \; |X - 2| > 5 \Leftrightarrow X - 2 > 5 \;\; \text{او} \;\; 2 - X > 5$$

وبحل هذا النظام نجد ان مجموعة الحل المطلوبة هي :

$$S_1 \cup S_2 = \{X : X \in R , X > 7\} \cup \{X : X \in R , X < -3\}$$

S_2 -3 7 S_1

مثال5/ حل المتباينة $|X + 1| \leq 2$ حيث $X \in R$

الحل /

لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة حسب خاصية (7)

فيكون $|X + 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq X + 1 \leq 2$

باضافة (1-) الى حدود المتباينة ينتج

$$-2 + (-1) \leq X + 1 + (-1) \leq 2 + (-1)$$

$$-3 \leq X \leq 1$$

$$\therefore \; S = [-3 , 1]$$

[12 – 2] حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

مبرهنة

اذا كان (a) عددا حقيقيا موجبا فان :

(1) مجموعة حل المتباينة $X^2 \leq a^2$ هي الفترة $[-a , a]$

(2) مجموعة حل المتباينة $X^2 < a^2$ هي الفترة $(-a , a)$

البرهان 2/

$(X - a)(X + a) < 0 \Leftarrow X^2 - a^2 < 0 \Leftarrow X^2 < a^2$

ومن خواص الحقل المرتب نستنتج القاعدة : اذا كان $a . b <$ صفر فان
اما $(a>0$ و $b<0)$
او $(a<0$ و $b>0)$

$[(X - a) < 0$ و $(X + a) > 0]$ او $[(X - a) > 0$ و $(X + a) < 0]$

$\Rightarrow [(X < a$ و $X > -a)]$ او $[(X > a$ و $X < -a)]$

$\Rightarrow (-a , a) \cup \varnothing = (-a , a)$

وبطريقة مماثلة يمكن برهنة (1) والتي نتركها للطالب

مثال6/ اذا كان $X^2 < 9$ فان مجموعة الحل للمتباينة هي :
$(-3,3)$. واذا كان $X^2 \le 9$ فان مجموعة الحل للمتباينة هي $[-3 , 3]$
اما مجموعة حل المتباينة $X^2 > 9$ فهي مجموعة حلول $R / X^2 \le 9$
اي $R / [-3 , 3]$
ومجموعة حلول المتباينة $X^2 \ge 9$ هي مجموعة حلول المتباينة $R / X^2 < 9$
اي $R / (-3 , 3)$

مثال7/ جد مجموعة حلول المتباينة : $5 \le |2X + 5| < 7$

الحل /

$$|2X + 5| = \begin{cases} 2X + 5 , \forall X > \frac{-5}{2} \\ -(2X + 5) , \forall X < \frac{-5}{2} \end{cases}$$

ان المتباينة $5 \le |2X + 5| < 7$ تكافئ النظام :

$[5 \le 2X + 5 < 7]$ او $[5 \le -(2X + 5) < 7]$

$\Leftarrow [0 \le 2X < 2]$ او $[10 \le -2X < 12]$

$\Leftarrow [0 \le X < 1]$ او $[-5 \le X < -6]$

مجموعة الحل $= (-6 , -5] \cup [0 , 1)$

مثال / جد مجموعة حل المتباينات التالية :

(1) $x^2 < 3$ الحل / $S = (\sqrt{-3}, \sqrt{3})$

(2) $x^2 \geq 16$ الحل / مجموعة حل المتباينة $x^2 \geq 16$ هي $R / x^2 < 16$

حيث ان $x^2 < 16$ هي نفي $x^2 \geq 16$

اي ان $S = R / (-4, 4)$

(3) $x^2 > 5$ الحل / نفي الجملة $x^2 > 5$ هي $x^2 \leq 5$

مجموعة حل الجملة المنفية $x^2 \leq 5$ هي $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

اذن مجموعة حل الجملة الاصلية $x^2 > 5$ هي

$S = R / (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

الخلاصة /

لحل المتباينة من الدرجة الاولى في متغير واحد :

★ نعرف المطلق ان وجد .

★ نستخدم خواص حقل الاعداد الحقيقية :

(اضافة النظير الجمعي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الجمع (0)

← الضرب في النظير الضربي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية الضرب (1)) .

★ اعد هذه السلسلة من الخطوات نحصل على حل المتباينة ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية R

حلول تمارين (4 – 2)

س1/ اذا كان $A = [-2, 5)$, $B = \{X : X \geq 1\}$

جد $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$

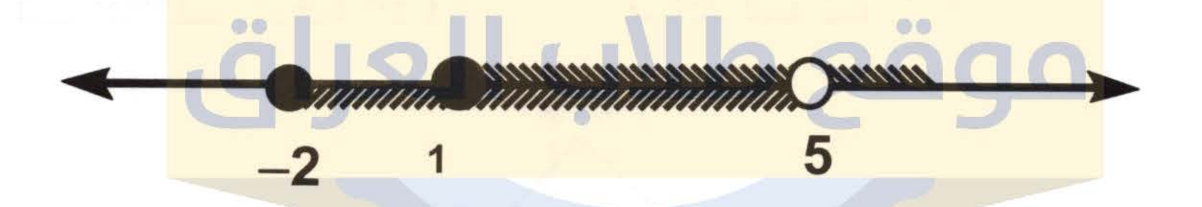
الحل /

$A \cup B = [-2, 5) \cup \{X : X \geq 1\} = \{X : X \geq -2\}$

$A \cap B = [-2, 5) \cap \{X : X \geq 1\} = [1, 5)$

$A - B = [-2, 5) - \{X : X \geq 1\} = [-2, 1)$

$B - A = \{X : X \geq 1\} - [-2, 5) = \{X : X \geq 5\}$



س2/ أ/ ارسم الدالة $Y = |X + 2| - 5$

الحل /

$$y = \begin{cases} (X+2)-5 & , \forall X \geq -2 \\ (-X-2)-5 & , \forall X < -2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} X-3 & , \forall X \geq -2 \\ -X-7 & , \forall X < -2 \end{cases}$$

المستقيم Y = - X - 7		
X	Y	(X , Y)
–2	-5	(–2,–5)
-7	0	(–7, 0)

المستقيم Y = X - 3		
X	Y	(X , Y)
-2	-5	(-2,–5)
-1	-4	(–1,-4)

ب/ ارسم الدالة $y = 3 - |X + 1|$

الحل /

$$|X-1| = \begin{cases} X+1 & , \forall X \geq -1 \\ -(X+1) & , \forall X < -1 \end{cases}$$

عندما $X < -1$ $y = 3 - (-X - 1)$

$y = 3 + X + 1$

$\boxed{y = 4 + X}$ قاعدة الاقتران

عندما $X = -1$ فان $y = 4 - 1$

$y = 3$

عندما $X = -2$ فان $y = 4 - 2$

$y = 2$

X	Y	(x , y)
-1	3	فجوة (-1,3)
-2	2	(-2,2)

$y = 3 - X - 1$

$\boxed{y = 2 - X}$ قاعدة الاقتران

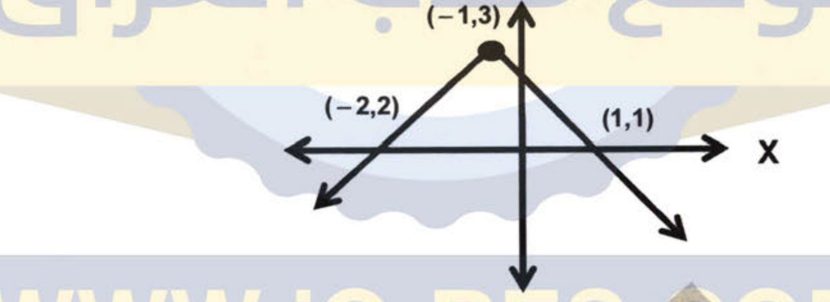
عندما $X = -1$ فان $y = 2 - (-1)$

$\therefore y = 2 + 1 = 3$

عندما $X = 1$ فان $y = 2 - (1)$

$\therefore y = 1$

X	Y	(x , y)
-1	3	(-1,3)
1	1	(1,1)



س3/ جد مجموعة حل كل من المعادلات الاتية :

أ/ $|4X + 3| = 1$

الحل /

$$|4X+3| = \begin{cases} 4X+3 & , \forall X \geq -\frac{3}{4} \\ -(4X+3) & , \forall X < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Either

$4x + 3 = 1$

$4x = 1 - 3$

$4x = -2$

Or

$-(4x + 3) = 1$

$-4x - 3 = 1$

$4x = -3 - 1$

$4x = -4$

$X = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ و $X = \frac{-4}{4} = -1$

$S = \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}$

جـ- $X^2 - 2|X| - 15 = 0$

الحل /

$$|X| = \begin{cases} X & , \forall X \geq 0 \\ -X & , \forall X < 0 \end{cases}$$

Either

$X \geq 0$

$X^2 - 2X - 15 = 0$

$(X - 5)(X + 3) = 0$

$X = 5$

$X = -3$ تهمل لا تحقق المعادلة

$S = \{5\}$

Or

$X < 0$

$X^2 - 2(-X) - 15 = 0$

$X^2 + 2X - 15 = 0$

$(X + 5)(X - 3) = 0$

$X = -5$

$X = 3$ تهمل لا تحقق المعادلة

$S = \{-5\}$

ب/ $X|X| + 4 = 0$

الحل /

$$|X| = \begin{cases} X & , \forall X \geq 0 \\ -X & , \forall X < 0 \end{cases}$$

Either

$X \geq 0$

$X \times X + 4 = 0$

$X^2 + 4 = 0$

$X^2 = -4$, $X \notin R$ تهمل

Or

$X < 0$

$X \times (-X) + 4 = 0$

$-X^2 + 4 = 0$

$X^2 = 4 \rightarrow X = \pm 2$

$\because X < 0$

$\therefore X = 2$ لاتحقق المعادلة

$\therefore S = \{-2\}$

د- $|X^2 + 4| = 29$

الحل /

دائما لان $X^2 + 4 > 0 \quad \forall X \in R$

$X^2 + 4 = 29$

$X^2 = 29 - 4$

$X^2 = 25$

$X = \pm 5$

$S = \{5 , -5\}$

هـ/ $X|X + 2| = 3$

الحل /

عندما $X < -2$

$X(-X - 2) = 3$

$-X^2 - 2X = 3$

$X^2 + 2X + 3 = 0$

لايمكن حل هذه المعادلة بالتجربة

$\therefore$ نحاول بالدستور حيث يجب

ان يكون المميز $\leq$ صفر حتى يكون

للمعادلة حل في R

المميز = $b^2 - 4ac$

المميز = $(2)^2 - 4(1)(3)$

المميز = $4 - 12$

المميز = $-8 <$ صفر

$\therefore$ ليس للمعادلة حل في R

عندما $X \geq -2$

$X(X + 2) = 3$

$X^2 + 2X = 3$

$X^2 + 2X - 3 = 0$

$(X + 3)(X - 1) = 0$

اما $X + 3 = 0 \rightarrow X = -3$ تهمل

لان الفرضية ان $X \geq -2$ بينما هنا $X < -2$

او $X - 1 = 0 \rightarrow X = 1$

$\therefore S = \{1\}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي فقط $S = \{1\}$

و/ $|2X + 1| = X$

الحل /

عندما $X < \frac{-1}{2}$

$-2X - 1 = X$

$-2X - X = 1$

$-3X = 1$

$X = \frac{-1}{3} \notin X < \frac{-1}{2}$

$\therefore S = \{\ \}$

عندما $X \geq \frac{-1}{2}$

$2X + 1 = X$

$2X - X = -1$

$X = -1$ ← لاتحقق الفرضية اعلاه

$\therefore S = \{\ \}$

$\therefore S = \phi$

س4/ جد مجموعة حلول كل معادلتين تحليليا (آنيا) وبيانيا :

أ– $2X + y = 4$ ..... (1)

$X - y = -1$ ..... (2)

بالجمع

$3X = 3$

$X = \frac{3}{3} = 1$

$\boxed{X = 1}$

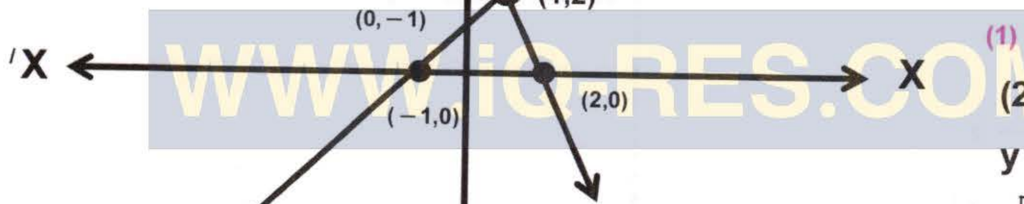
نعوض في المعادلة (1)

$(2 \times 1) + y = 4$

$y = 4 - 2$

$\boxed{y = 2}$

$S = \{(1 , 2)\}$



المستقيم $X - y = -1$		
X	Y	(X , y)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)

المستقيم $2X + y = 4$		
X	Y	(X , y)
0	4	(0,4)
2	0	(2,0)

ب-

$4X + 3y = 17$

$\mp 2X \mp 3y = \mp 13$

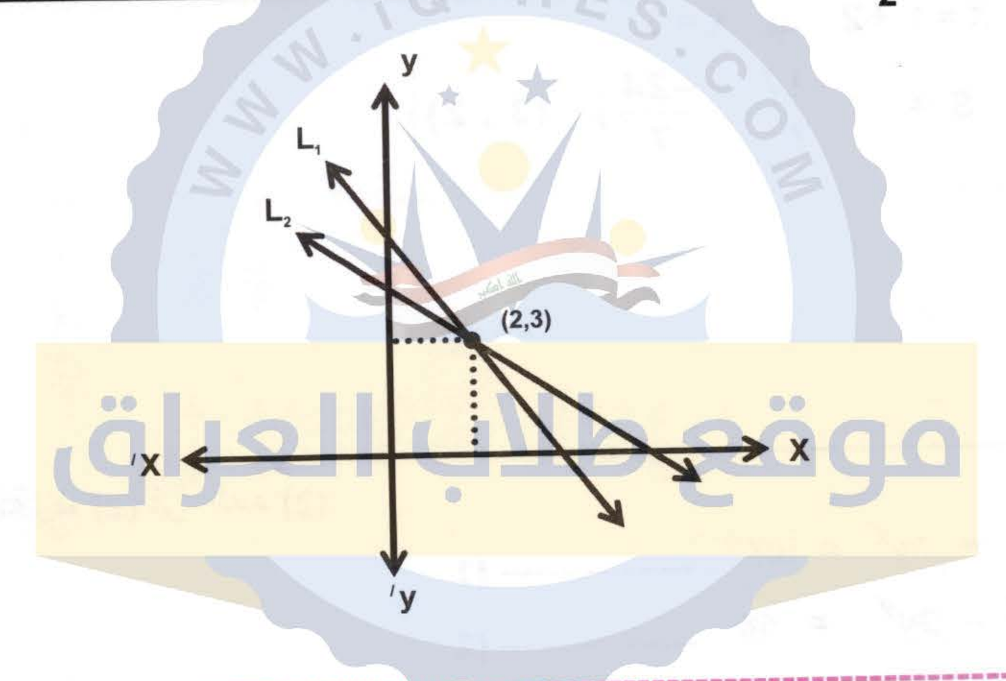
بالطرح

$2X = 4$

$X = \frac{4}{2} = 2$ $\boxed{X = 2}$

المستقيم $4X + 3y = 17$		
X	Y	(X , y)
0	$\frac{17}{3}$	$(0, \frac{17}{3})$
$\frac{17}{4}$	0	$(\frac{17}{4}, 0)$

المستقيم $2X + 3y = 13$		
X	Y	(X , y)
0	$\frac{13}{3}$	$(0, \frac{13}{3})$
$\frac{13}{2}$	0	$(\frac{13}{2}, 0)$



س 4 / (جـ)

$5X^2 + 2y^2 = 53$ ---------------- (1

$X - y = 1$ ---------------- (2

نكون معادلة جديدة معادلة رقم (3) من معادلة رقم (2)

$X = 1 + y$ ---------------- (3

نعوض معادلة رقم (3) في معادلة رقم (1)

$5(1+y)^2 + 2y^2 = 53$

$5(1 + 2y + y^2) + 2y^2 = 53$

$5 + 10y + 5y^2 + 2y^2 = 53$

$7y^2 + 10y - 48 = 0$

$(7y + 24)(y - 2) = 0$

اما $(7y + 24) = 0 \rightarrow 7y = -24 \rightarrow y = \frac{-24}{7}$

أو $(y - 2) = 0 \rightarrow y = 2$

نعوض قيم y في معادلة رقم (3) لايجاد قيم x

اما $x = 1 + \frac{-27}{7} \rightarrow x = 1 - \frac{27}{7} \rightarrow x = \frac{7-24}{7} \rightarrow x = \frac{-17}{7}$

أو $x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$

$\therefore S = \left\{ \left(\frac{-17}{7}, \frac{-24}{7}\right), (3, 2) \right\}$

س 4 / (د)

$3x^2 + 2y^2 = 107$ ---------- (1

$2x^2 - y^2 = 34$ ---------- (2

بضرب معادلة رقم (2) في العدد (2)

$3x^2 + \cancel{2y^2} = 107$ ---------------- (1

$4x^2 - \cancel{2y^2} = 68$ ---------------- (2

بالجمع

$7x^2 = 175$

$x^2 = \frac{175}{7}$

$x^2 = 25$

$x = \mp 5$

نعوض قيمة x في معادلة رقم (2) لايجاد قيمة y

$2(5)^2 - y^2 = 34$

$2(25) - y^2 = 34$

$50 - y^2 = 34$

$y^2 = 50 - 34$

$y^2 = 16$

$y = \mp 4$

$\therefore S = \{(5, -4), (5, 4), (-5, -4), (-5, 4)\}$

س5/ جد مجموعة حلول كل من المتباينات التالية :

أ / $|X - 6| \leq 1$

الحل /

$$|X-6| = \begin{cases} X-6 & , \forall X \geq 6 \\ 6-X & , \forall X < 6 \end{cases}$$

عندما $X < 6$ | عندما $X \geq 6$

$6 - X \leq 1$ | $X - 6 \leq 1$

$-X \leq 1 - 6$ | $X \leq 1 + 6$

$[-X \leq -5] \times -1$ | $X \leq 7$

$X \geq 5$

مج$_2$ $= [5, 6)$ | مج$_1$ $= [6, 7]$

مج $= [5, 6) \cup [6, 7]$

مج $= [5, 7]$

ب / $2 \leq |X + 1| \leq 4$

الحل /

$$|X+1| = \begin{cases} X+1 & , \forall X \geq -1 \\ -(X+1) & , \forall X < -1 \end{cases}$$

عندما $X < -1$ | عندما $X \geq -1$

$[2 \leq -(X + 1) \leq 4]$ أو $[2 \leq X + 1 \leq 4]$

$[2 \leq -X - 1 \leq 4]$ أو $[2 - 1 \leq X + 1 - 1 \leq 4 - 1]$

$[2 + 1 \leq -X - 1 + 1 \leq 4 + 1]$ أو $[1 \leq X \leq 3]$

$[3 \leq -X \leq 5]$ أو $[1 \leq X \leq 3]$

$[-3 \geq X \geq -5]$ $\cup$ $[1 \leq X \leq 3]$

$[-5, -3]$ $\cup$ $[1, 3]$

$= [-5, 3] / (-3, 1)$

جـ/ $3 - 12 \leq -3 \leq |2X - 3| - 9 \leq 9 -$

الحل/

باضافة النظير الضربي لـ (1-)

$$-9 + 12 \leq |2X - 3| - 12 + 12 \leq -3 + 12$$

$$3 \leq |2X - 3| \leq 9$$

$$|2X-3| = \begin{cases} 2X-3 & , \forall X \geq \frac{3}{2} \\ -2X+3 & , \forall X < \frac{3}{2} \end{cases}$$

عندما $X < \frac{3}{2}$ — عندما $X \geq \frac{3}{2}$

$[3 < -2X + 3 \leq 9]$ أو $[3 < 2X - 3 \leq 9]$

$[3 - 3 < -2X + 3 - 3 \leq 9 - 3]$ أو $[3 + 3 < 2X - 3 + 3 \leq 9 + 3]$

$[0 < -2X \leq 6]$ أو $[6 < 2X \leq 12]$

$\left[\frac{-1}{2} \times 0 > \frac{-1}{2} \times -2X \geq \frac{-1}{2} \times 6\right]$ أو $\left[\frac{1}{2} \times 6 < \frac{1}{2} \times 2X \leq \frac{1}{2} \times 12\right]$

$[0 > X \geq -3]$ U $[3 < X \leq 6]$

مجموعة الحل = $(3, 6] \cup [-3, 0)$

د/ $2X^2 \leq 8$

الحل /

$$X^2 \leq \frac{8}{2}$$

$$X^2 \leq 4 \qquad S_{مج} = [-2, 2]$$

هـ/ $3X^2 - 27 > 0$

الحل / $3X^2 > 27$

$$X^2 > \frac{27}{3}$$

$X^2 > 9$ ← نفيها = $X^2 \leq 9$

$X > \pm 3$ ← نفيها = $X \leq \pm 3$

$\therefore S_{مج}$ للنفي = $[-3, 3]$

$\therefore S$ للمتباينة = $R / [-3, 3]$

امثلة اضافية /

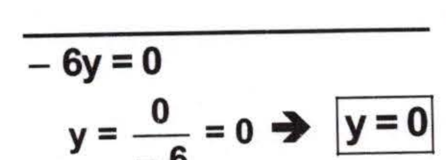
(1)

$$3X + y = 15$$

$$\mp 3X \mp 7y = \mp 15$$

بالطرح

$$-6y = 0$$



$$y = \frac{0}{-6} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$3X + 0 = 15$$

$$3X = 15$$

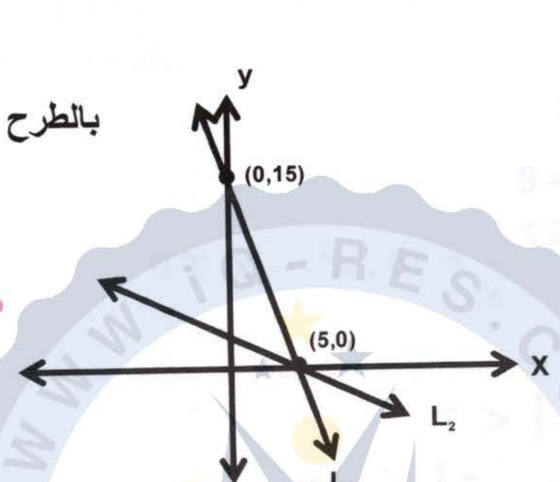
$$X = \frac{15}{3} = 5$$

$$\boxed{X = 5}$$

$$\therefore S = \{(5, 0)\}$$

المستقيم $3X + y = 15$		
X	Y	(X , y)
0	15	(0,15)
5	0	(5,0)

المستقيم $3X + 7y = 15$		
X	Y	(X , y)
0	$\frac{15}{7}$	$(0, \frac{15}{7})$
5	0	(5,0)



(2)

$$(2X + 3y = 0) \times 2$$

$$5X + 6y = 11$$

$$4X + 6y = 0$$

$$\mp 5X \mp 6y = \mp 11$$

بالطرح

$$-X = -11$$

$$\boxed{X = 11}$$

نعوض في المعادلة (1)

$$(4 \times 11) + 6y = 0$$

$$44 + 6y = 0$$

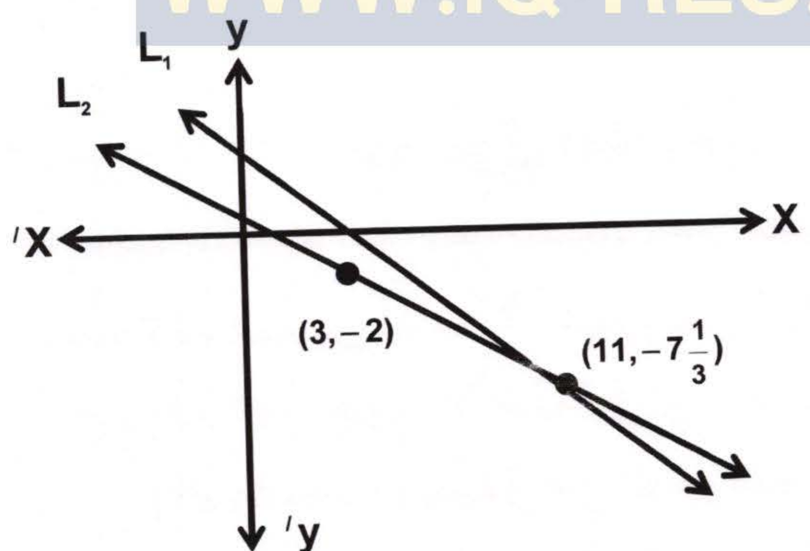
$$6y = -44$$

$$y = \frac{-44}{6} = -7\frac{1}{3}$$

$$\boxed{y = -7\frac{1}{3}}$$

المستقيم $2X + 3y = 0$		
X	Y	(X , y)
0	0	(0,0)
3	−2	(3,−2)

المستقيم $5X + 6y = 11$		
X	Y	(X , y)
0	$\frac{11}{6}$	$(0, \frac{11}{6})$
$\frac{11}{5}$	0	$(\frac{11}{5}, 0)$



اسئلة حلول الفصل الثاني

س1/ جد مجموعة حل المعادلة التالية في R

① $|x^2 + 1| = 5$

② $|x + 2| + x = 0$

③ $x^2 - x + \frac{72}{x^2 - x} = 18 , x^2 - x \neq 0$

س2/ جد مجموعة حل المتباينات التالية

① $3 \leq |2x - 1| < 7$

② $-5 \leq 2 - |2x - 5| \leq -3$

③ $x^2 - 2x + 1 > 0$

④ $x^2 + 4 > 0$

⑤ $x^2 + 9 < 0$

⑥ $x^2 - x - 2 < 0$

س3/ أرسم منحني الدوال التالية

① $f : R \longrightarrow R , f(x) = x|x| - 1$

② $f : R \longrightarrow R , f(x) = 5 - |x - 2|$

③ $f : R \longrightarrow R , f(x) = 3 - x^3$

④ $f : R \longrightarrow R , f(x) = 2x - |x - 1|$

الفصل الثالث

الاسس والجذور

الاسس للاعداد الصحيحة /

التعريف / اذا كان $n \in Z$, $a \in R$ فان $a^n = a \times a \times ... \times a$ (a مضروبة بنفسها n من المرات).

خصائص الاسس

(1) عند الضرب تجمع الاسس للاساسات المتساوية :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$
$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$$
$$a^2 \times b^4 \times a \times b^6 = a^3 \times b^{4+6} = a^3 \times b^{10}$$

(2) عند القسمة تطرح الاسس للاساسات المتساوية :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
$$\frac{x^{17}}{x^3} = x^{17-3} = x^{14}$$
$$\frac{y^6}{y^{13}} = \frac{1}{y^{13-6}} = \frac{1}{y^7} = y^{-7}$$

(3) عند الرفع تضرب الاسس (حيث نقوم بضرب الاس الاول في اس القوس)

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{nm}$$
$$(7^5)^3 = 7^{5 \times 3} = 7^{15}$$

(4) عند جذر مقدار معين : نقسم اس المقدار على دليل الجذر (أي ان دليل الجذر يصبح مقام للاس) :

دليل الجذر ← $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$

دليل الجذر ← $\sqrt[3]{r^5} = r^{\frac{5}{3}}$

(5) أي قيمة عددية او أي مقدار بأس صفر فانه يساوي واحد دائما :

$(10)^0 = 1$, $x^0 = 1$, $(x-y)^0 = 1$

(6) عند نقل مقادير من البسط الى المقام وبالعكس فان اشارة الاس تتغير :

$$\frac{2^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{2^3}$$

(7) عندما نقوم بتبسيط جذر يحتوي على كسر نوزع الجذر للبسط والمقام بحيث يكون دليل الجذر اكبر من واحد , ودليل الجذر ينتمي الى N^+

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{x^3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x}{2}$$

(8) عند وجود كميتين مضروبتين مع بعضهما داخل جذر دليله ينتمي الى N واكبر (1) نستطيع ان نجزء الجذر الى جذرين مضروبين مع بعضهما وداخل كل جذر كمية من الكميتين السابقتين وتحميل كل جذر الدليل نفسه للجذر الاصلي : $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

(9) عند اختصار او تبسيط أي مقادير كسرية يجب ان نجعل الاساسات عبارة عن اعداد اولية (2,3,5,7,11,.....) , وذلك اما ان نرفع العدد لاس معين (عدد اولي مرفوع لاس) , او نقوم بتجزئة العدد الغير اولي الى عددين اوليين مضروبين مع بعضهما البعض او اكثر من عددين اوليين وكل عدد اولي منهما مرفوع للاس الاصلي نفسه الذي كان العدد مرفوع له قبل التجزئة :

بعد التجزئة — بعد التجزئة — أصبح بعد التجزئة — كان قبل التجزئة 6^{n+1}

$$\frac{9^{n-1} \times 8^n}{2^{n+1} \times 6^{n+1}} = \frac{3^{2n-2} \times 2^{3n}}{2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 3^{n+1}} = \frac{3^{2n} \times 3^{-2} \times 2^{3n}}{2^n \times 2^1 \times 3^n \times 3^1 \times 2^n \times 2^1}$$

$$= 3^{2n-n-2-1} \times 2^{3n-n-n-1-1} = 3^{n-3} \times 2^{n-2}$$

(10) عند تبسيط مقدار كسري يحتوي على عدة حدود في البسط وعدة حدود في المقام

نقوم اولا: بتحويل القيم والحدود الى اعداد اولية مرفوعة لاس من غير تجزئة او مرفوعة لاس بالتجزئة كما في الفقرة السابقة **وبعدها** نقوم بأخراج العامل المشترك الاكبر لكل من البسط والمقام **وبعدها** يتم الاختصار ان وجد وبأبسط صورة ممكنة.

$$\frac{5^n + 5^{n-1}}{5^{n+1} - 5^{n-1}} = \frac{5^n + 5^n \times 5^{-1}}{5^n \times 5^1 - 5^n \times 5^{-1}} = \frac{\cancel{5^n}(1 + 5^{-1})}{\cancel{5^n}(5 - 5^{-1})} = \frac{\frac{5+1}{5}}{\frac{25-1}{5}}$$

$$\frac{6}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

تذكير / لبعض القوانين الرياضية المهمة والضرورية التي يحتاجها الطالب في حلول بعض المسائل

(a) حاصل ضرب الحدود الجبرية المتشابهة في الاشارة دائما (موجب +)

$-2 \times -6 = +12$

$3x \times 5 = +15x$

$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = +7$

(b) حاصل ضرب الحدود الجبرية المختلفة في الاشارة دائما (سالب −)

$-8 \times 5 = -40$

$6y \times -25 = -12y$

ملاحظات مهمة /

(1) يمكن ضرب الحدود الجبرية المختلفة في القسم الرمزي بعضها مع البعض .

$-4\boxed{x} \times +7\boxed{y} = -28xy$

القسم الرمزي القسم الرمزي

(2) عند الضرب تجمع الاسس للاساسات المتساوية .

$5x \times 3x^2 = 15x^{1+2} = 15x^3$

$6y^2 \times 4xy^3 = 24xy^{2+3} = 24xy^5$

(3) الاساس السالب المرفوع الى اس فردي ناتجه دائما سالب (–)

اس فردي: $(-2)^3 = -8$ (الناتج ، اساس سالب) * اس فردي: $(-1)^5 = -1$ (الناتج ، اساس سالب)

(4) الاساس السالب المرفوع الى اس زوجي ناتجه دائما موجب (+)

$(-3)^2 = +9$ * $(-5)^4 = +625$

(5) الاساس الموجب المرفوع الى اس فردي كان ام زوجي فان ناتجه دائما موجب (+)

$(7)^2 = 49$ * $(8)^2 = 64$

توزيع عملية الضرب على عملية الجمع

$2 - (3 - x) = 2 - 3 + x = -1 + x$

في المثال اعلاه : الاشارة التي تسبق القوس وهي اشارة (–) تتوزع داخل القوس حيث تضرب في كل اشارة موجودة داخل القوس , ثم تتم جمع الحدود كما سبق وتعلمنا .

$\boxed{-2}\,(3 - x) = -6 + 2x$

في المثال الثاني : نقوم بتوزيع الحد كله مع الاشارة (أي نضرب الحد (2–) في جميع الحدود الموجودة داخل القوس) ثم نقوم بالجمع للحدود ان وجد ذلك كما سبق وتعلمنا .

ملاحظة مهمة /

حاصل جمع الحدود المتشابهة في المقدار والمختلفة في الاشارة يساوي دائما (صفر)

$-3\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 0$

$6y - 6y = 0$

مثال1/ جد قيمة $\dfrac{8^{-3} \times 18^2}{81 \times 16^{-2}}$

الحل /

$$\frac{8^{-3} \times 18^2}{81 \times 16^{-2}} = \frac{(3^2 \times 2)^2 \times (2^3)^{-3}}{3^4 \times (2^4)^{-2}} = \frac{2^{-9} \times 2^2 \times 3^4}{3^4 \times 2^{-8}}$$

$$= 3^{4-4} \times 2^{-9+2+8} = 3^0 \times 2^1 = 1 \times 2 = 2$$

مثال2/ اذا كان $m , n \in Z$ فأثبت ان : $\frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5}{9}$

الحل /

$$\text{الطرف الايسر} = \frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^m \times 5^{2n+m}} = \frac{5^3 \times (5 \times 3)^{m-2} \times (5^2)^{m+n}}{(3 \times 5^2)^m \times 5^{2n+m}}$$

$$= \frac{5^3 \times 5^{m-2} \times 3^{m-2} \times 5^{2m+2n}}{3^m \times 5^{2m} \times 5^{2n+m}}$$

$$= 5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m} \times 3^{m-2-m}$$

$$= 5 \times 3^{-2} = 5 \times \frac{1}{3^2} = \frac{5}{9} = \text{الطرف الايمن}$$

مثال3/ اختصر المقدار التالي بحيث تكون الاسس موجبة $\frac{(x^2)^3 . y^4 . Z^5}{x^3 . (y^3)^2 . Z^5}$

الحل /

$$\frac{x^6 . y^4 . Z^5}{x^3 . y^6 . Z^5} = \frac{x^{6-3} . Z^{5-5}}{y^{6-4}} = \frac{x^3 . Z^0}{y^2} = \frac{x^3 . 1}{y^2} = \frac{x^3}{y^2}$$

مثال4/ اثبت ان : $\frac{81^{n+1} \times 625^n}{9^{2n} \times 27 \times 25^{2n-1}} = 75$

الحل /

$$\text{الطرف الايسر} = \frac{(3^4)^{n+1} \times (5^4)^n}{(3^2)^{2n} \times (3)^3 \times (5^2)^{2n-1}} = \frac{3^{4n+4} \times 5^{4n}}{3^{4n} \times 3^3 \times 5^{4n-2}}$$

$$= 3^{4n-4n+4-3} \times 5^{4n-4n+2} = 3^1 \times 5^2 = 3 \times 25 = 75 \text{ الطرف الايمن}$$

و . هـ . م

مثال5/ اختصر المقادير التالية بحيث تكون الاسس موجبة :

(a) $$\frac{2 \times 7^{-1} + 1 \times 2^{-2} \times 7}{2^{-1} \times 7^{-1}} = \frac{2 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{1}{2^2} \times 7}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{\frac{2}{7} + \frac{7}{4}}{\frac{1}{14}}$$

$$= \frac{\frac{8+49}{28}}{\frac{1}{14}} = \frac{57}{28} \times \frac{14}{1} = \frac{57}{2}$$

(b) $$\frac{2^{-2} \times 5^{-2} \times 2^6}{2^{-3} \times 5^{-3} \times 2^5} = \frac{2^{6-2} \times 5^{-2}}{2^{5-3} \times 5^{-3}} = \frac{2^4 \times 5^{-2}}{2^2 \times 5^{-3}} = 2^{4-2} \times 5^{-2+3}$$

$$= 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$$

مثال6/ اثبت ان : $\frac{9^{\frac{1}{2}n+1}+3^{n+1}}{\sqrt{9^n}-3^{n-1}}=18$

الطرف الايسر $=\frac{9^{\frac{1}{2}n+1}+3^{n+1}}{\sqrt{9^n}-3^{n-1}}=\frac{(3^2)^{\frac{1}{2}n+1}+3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n}-3^{n-1}}$

$$=\frac{3^{2(\frac{1}{2}n+1)}+3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}}-3^{n-1}}=\frac{3^{n+2}+3^{n+1}}{3^n-3^{n-1}}$$

$$=\frac{3^n\times 3^2+3^n\times 3^1}{3^n-3^n\times 3^{-1}}$$

$$=\frac{\cancel{3^n}(3^2+3)}{\cancel{3^n}(1-3^{-1})}=\frac{(9+3)}{(1-\frac{1}{3})}$$

$=\frac{12}{\frac{3-1}{3}}=\frac{12}{\frac{2}{3}}=\overset{6}{\cancel{12}}\times\frac{3}{\cancel{2}}=18=$ الطرف الايمن

الجذور /

اذا كان $a\in R , n\in N , n>1$ فان كل عدد حقيقي X يحقق المعادلة $X^n=a$

يسمى جذرا نونيا للعدد a ويرمز له $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$

نتائج التعريف /

(1) $\sqrt[n]{0}=0 , \forall n\in N , n>1$

(2) اذا كان n عدد طبيعي زوجي وكان a عدد حقيقي موجب فان كل من العددين

$X=\sqrt[n]{a} , X=-\sqrt[n]{a}$ يحقق المعادلة $X^n=a$

(3) اذا كان n عدد طبيعي زوجي وكان a عدد حقيقي سالب فانه لا يوجد عدد حقيقي يحقق

المعادلة $X^n=a$ لان X^n موجب $\forall x\in R$

(4) اذا كان n عدد طبيعي فردي وكان a عدد حقيقي فانه يوجد عدد حقيقي واحد يحقق

المعادلة $X^n=a$

مبرهنة /

اذا كان $a,b \in R$, $n \in N$, $n > 1$ فان

① $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, { $a \geq 0$, $b \geq 0$ اذا كان n عدد زوجي }

② $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث

$b > 0$, $a \geq 0$ اذا كان n عدد زوجي

$b \in R/\{0\}$, $a \in R$ اذا كان n عدد فردي

الاسس ذات الاعداد النسبية

عند رفع الجذر يصبح دليل الجذر مقام للاس الذي تحت الجذر

$\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$ ← دليل الجذر

$\sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}}$ ← دليل الجذر

$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ ← دليل الجذر وهو (2)

مثال7/ اثبت ان : $\left[\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 8$

الحل /

الطرف الايسر $= \left[\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \times \sqrt{2 \times 2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}}$

$$= \left[\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}}}{2 \times 2^{-\frac{n}{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[2^{2n + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$\frac{4n + n + n}{2} = \frac{6n}{2} = 3n$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$= \left[2^{3n}\right]^{\frac{1}{n}} = 2^{3n \times \frac{1}{n}} = 2^3 = 8 =$ الطرف الايمن

حلول تمارين (1 - 3)

س1/ جد ناتج مايأتي :

(أ) $8^0 + 9^0 = 1 + 1 = 2$

(ب) $2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

(ج) $(16)^{-1} + 16 = \frac{1}{16} + 16 = \frac{1+256}{16} = \frac{257}{16}$

(د) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt{2^{\frac{6}{3}}} = \sqrt{2^2} = 2$

(هـ) $\frac{2^{-3} \times 4^{-5}}{6^{-1} \times 3^3} = \frac{2^{-3} \times 2^{-5} \times 2^{-5}}{2^{-1} \times 3^{-1} \times 3^3} = \frac{2 \times 3}{2^3 \times 2^5 \times 2^5 \times 3^3} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3}}{2^{\cancel{13}\,12} \times 3^{\cancel{3}\,2}} = \frac{1}{9 \times 2^{12}}$

(و) $\frac{10^3 \times 4^7}{10^{-5} \times 2^5} = \frac{2^3 \times 5^3 \times 2^7 \times 2^7}{2^{-5} \times 5^{-5} \times 2^5} = 2^{3+7+7+\cancel{5}-\cancel{5}} \times 5^{3+5} = 2^{17} \times 5^8$

(ز) $(\sqrt[5]{27})^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[5]{3^3})^{\frac{5}{3}} = (3^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}} = 3^1 = 3$

(ح) $3a^0 = 3 \times 1 = 3$

(ط) $(3a)^0 = 3^0 \times a^0 = 1 \times 1 = 1$

(ي) $(a+b)^0 = 1$

(ك) $(\sqrt[5]{-32})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt[5]{-32})^3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{-1}{8}$

س2/ اكتب المقادير التالية بأبسط صورة :

(أ) $\sqrt{(\frac{3}{4})^2 \frac{20a^3}{45a}} = \sqrt{\frac{\cancel{9}}{\cancel{16}\,4} \times \frac{\cancel{20}a^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{45}\,\cancel{a}\,\cancel{5}}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a}{2}$

(ب) $(-a)^4\left[\frac{(-a)^3\sqrt[6]{729}}{3a}\right]^2 = (-a)^4\left[\frac{(-a)^3\sqrt[6]{3^6}}{3a}\right]^2$

$= a^4 \times \left[\frac{(-a)^3 \times 3}{3a}\right]^2$

$= \frac{a^4 \times a^6 \times 3^2}{3^2 \times a^2} = a^{4+6-2} = a^8$

(ج) $\sqrt{25\,b^2\,c^{-8}} = \sqrt{\frac{25b^2}{c^8}} = \frac{\sqrt{25b^2}}{\sqrt{c^8}} = \frac{5b}{c^{\frac{8}{2}}} = \frac{5b}{c^4}$

(د) $\frac{3x^{-5} * y^2}{2^{-1} * y^{-2}} = \frac{3x2 \times y^{2+2}}{x^5} = \frac{6y^4}{x^5}$ حيث $x \neq 0$

س3/ اكتب كلا من العبارات الاتية بشكل يكون المقام فيها (1) ولايكون تحت الجذر مستخدما الاسس.

(أ) $\frac{bc}{d} = bcd^{-1}$ حيث $d \neq 0$

(ب) $\frac{1}{b^5} = b^{-5}$ حيث $b \neq 0$

(ج) $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ حيث $x \geq 0$

(د) $\frac{4b^2}{b^2c^2} = 4b^{2-2}\,c^{-2} = 4c^{-2}$ حيث $b \neq 0$

(هـ) $\frac{1}{b^2 + c^2} = (b^2 + c^2)^{-1}$

(و) $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$ حيث $x \neq 0$

س4/ اذا كان $a \in \bar{R}$, $m \leftarrow$ عددا صحيحا زوجيا فاي مما ياتي صائبة ؟

(أ) $a^m > 0$ صائبة (ب) $a^m < 0$ (ج) $a^m \geq 0$ (د) $a^m \leq 0$

س5/ اذا كان $a \in \bar{R}$, $m \leftarrow$ عددا صحيحا فرديا فأي مما يأتي صائبة؟

(أ) $a^m > 0$ (ب) $a^m < 0$ صائبة (ج) $a^m \geq 0$ (د) $a^m \leq 0$

س6/ (أ) برهن أن : $a^{(x-y)^z} \cdot a^{(z-x)^y} \cdot a^{(y-z)^x} = 1$

الحل /

الطرف الايسر $= a^{xz-yz} \cdot a^{zy-xy} \cdot a^{yx-zx}$

$= a^{xz + zy + yx + yz + xy + zx} = a^0 = 1 =$ الطرف الايمن

(ب) برهن أن : $\left[x^{n^2-1} \div x^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$

الحل /

الطرف الايسر $= \left[\dfrac{x^{n^2-1}}{x^{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n-1+1}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[x^{n^2-n}\right]^{\frac{1}{n}}$

$= x^{\frac{1}{n}(n^2-n)} = x^{\frac{n^2}{n}-\frac{n}{n}} = x^{n-1} =$ الطرف الايمن

س7/ برهن أن : $\dfrac{1}{1+a^{b-c}} + \dfrac{1}{1+a^{c-b}} = 1$

الحل /

الطرف الايسر $= \dfrac{1}{1+\dfrac{a^b}{a^c}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{a^c}{a^b}}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{a^c+a^b}{a^c}} + \dfrac{1}{\dfrac{a^b+a^c}{a^b}}$

$= 1 \times \dfrac{a^c}{a^c+a^b} + 1 \times \dfrac{a^b}{a^b+a^c} = \dfrac{a^c}{a^c+a^b} + \dfrac{a^b}{a^b+a^c} = \dfrac{(a^c+a^b)}{(a^c+a^b)} = 1$

و . هـ . م

س8/ اثبت أن : $\frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}} = \frac{11}{15}$

الحل / الطرف الايسر $= \frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n} \times 3^{-1}}{2 \times 3^{2n} \times 3 - 3^{2n}} = \frac{3^{2n}(5 - 4 \times \frac{1}{3})}{3^{2n}(2 \times 3 - 1)} = \frac{5 - \frac{4}{3}}{5}$

$= \frac{\frac{15-4}{3}}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{11}{15} =$ الطرف الايمن

س9/ اختصر كلا مما ياتي الى ابسط صورة $\frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$ ، $\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}}$

الحل / $\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}} = \frac{2^{4n-1} \times 3^{4n-1} \times (3^3)^{2n}}{2^{n+1} \times (2^3)^{n-1} \times (3^2)^{n+2}}$

$\frac{2^{4n} \times 2^{-1} \times 3^{4n} \times 3^{-1} \times 3^{6n}}{2^n \times 2 \times 2^{3n} \times 2^{-3} \times 3^{2n} \times 3^4} = 2^{4n-n-3n-1-1+3} \times 3^{4n+6n-2n-1-4}$

$= 2 * 3^{8n-5} = \frac{2 \times 3^{8n}}{3^5}$

$\frac{3^{n+2} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}} = \frac{3^n \times 3^2 + 3^n \times 3}{3^n - 3^n \times 3^{-1}} = \frac{\cancel{3^n} \times 3(3+1)}{\cancel{3^n}(1 - \frac{1}{3})}$

$= \frac{3 \times 4}{\frac{3-1}{3}} = \frac{12}{\frac{2}{3}} = \overset{6}{\cancel{12}} \times \frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 18$

س10/ برهن ان : $\left[\frac{(9^{n+\frac{1}{4}}) \times \sqrt{3 \times 3^n}}{3 \times \sqrt{3^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 27$

الحل / الطرف الايسر $= \left[\frac{((3^2)^{n+\frac{1}{4}}) \times (3 \times 3^n)^{\frac{1}{2}}}{3 \times \sqrt{\frac{1}{3^n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}}}{\frac{3}{3^{\frac{n}{2}}}}\right]^{\frac{1}{n}}$

$\left[\frac{3^{2n} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{n}{2}}}{1} \times \frac{3^{\frac{n}{2}}}{3}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^{2n+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{3}\right]^{\frac{1}{n}}$

$\left[\frac{3^{\frac{4n+n+n}{2}} \times \cancel{3}}{\cancel{3}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{\overset{3}{\cancel{6}}n}{\cancel{2}}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{\frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}}}\right] = 3^3 = 27 =$ الطرف الايمن

المعادلات الاسية البسيطة

[2- 3] حل المعادلات الاسية البسيطة

تتضمن المعادلة الاسية Exponential Equation متغير في الاس.
ولحل هذا النوع من المعادلات ندرج الملاحظات الاتية :

(1) في أي معادلة : ((اذا تساوت الاساسات فسوف تتساوى الاسس بشرط الاساس $\neq 1$))
أي : اذا كان $a^x = a^y \Rightarrow x = y \ , \ a \neq 1$

(2) اذا كان $x^n = y^n$ فان $x = y$ اذا كانت n فردية

$x = \pm y$ اذا كانت n زوجية

(3) اذا كان $x^n = y^m$ حيث $(m = n = 0)$ والان لاحظ حل كلاً من المعادلات الاتية :

(أ) $$(x+2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x+2)^{-\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{3}{5}}$$

$$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

$\therefore$ مج = $\{1\}$

(ب) $$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 2^3 \Rightarrow (x^{\frac{1}{3}})^3 = (2^3)^3$$

$$\Rightarrow x = 2^9 \Rightarrow x = 512$$

$\therefore$ مج = $\{512\}$

(ج) $$\sqrt[3]{X^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow X^{\frac{2}{3}} = 3^{-2} \Rightarrow (X^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = \pm(3^{-2})^{\frac{3}{2}}$$

$$X = \pm 3^{-3} \Rightarrow X = \pm\frac{1}{27}$$

$\therefore$ مج = $\left\{\pm\frac{1}{27}\right\}$

مثال1/ حل المعادلة : $2^{x^2 - 2x + 1} = 4^{x+3}$

الحل /

$2^{x^2 - 2x + 1} = 2^{2(x+3)}$ نجعل الاساس نفسه في طرفي المعادلة

$\therefore \ x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$ اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 5 \ , \ x = -1$$

$\therefore$ مجموعة الحلول = $\{-1 , 5\}$

وتسمى مثل هذه المعادلة المعادلة الاسية لان الاسس متغيرة .

مثال2/ حل المعادلة: $3^{2x+1} - 4 \times 3^{x+2} = -81$

الحل /

$$\left[3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^{x} \times 3^{2} + 81 = 0\right] \div 3$$

$$3^{2x} - 12 \times 3^{x} + 27 = 0$$

$$(3^{x} - 3)(3^{x} - 9) = 0$$

اما $3^{x} = 9 \rightarrow 3^{x} = 3^{2} \rightarrow x = 2$

او $3^{x} = 3 \rightarrow x = 1$

مجموعة الحلول = $\{1 , 2\}$

مثال3/ جد قيمة x اذا كان: (أ) $3^{x-1} = 5^{x-1}$ (ب) $(x+3)^{5} = 4^{5}$ (ج) $(x-1)^{6} = 2^{6}$

الحل /

(أ) بتطبيق ملاحظة (3) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

(ب) بتطبيق ملاحظة (2) $x + 3 = 4 \rightarrow x = 1$

(ج) بتطبيق ملاحظة (2)

$$x - 1 = \pm 2$$

$$x - 1 = +2 \rightarrow x = 3$$

$$x - 1 = -2 \rightarrow x = -1$$

$$S = \{-1,3\}$$

مثال4/ حل المعادلة في R حيث $8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{2}{3}} = 14$

الحل /

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}(1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}(1 + 2 + 4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} = \frac{14}{7}$$

$$8^{\frac{x}{2}} = 2 \rightarrow (2^{3})^{\frac{x}{2}} = 2 \rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{1}$$

$$\frac{3x}{2} = 1 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

حلول تمارين (2 – 3)

س1/ حل كل من المعادلات الاتية :

(أ) $\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$

$x^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^3}$

$x^{\frac{3}{5}} = 3^{-3}$

$(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}} = (3^{-3})^{\frac{5}{3}}$

$x = 3^{-5}$

$x = \frac{1}{3^5}$

$x = \frac{1}{243}$

(ب) $(\sqrt[5]{243})^2 = (x^{-\frac{1}{2}})^2$

$(243)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$

$(3^5)^{\frac{2}{5}} = x^{-1}$

$3^2 = x^{-1}$

$9 = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{9}$

(جـ) $(x + 2)^{\frac{1}{2}} = 3$

$\sqrt{x + 2} = 3$

بتربيع الطرفين

$x + 2 = 9$

$x = 9 - 2$

$x = 7$

(د) $10^{(x-4)(x-5)} = 100$

$10^{(x-4)(x-5)} = 10^2$

$(x - 4)(x - 5) = 2$

$x^2 - 5x - 4x + 20 - 2 = 0$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x - 6)(x - 3) = 0$

$\boxed{x = 6}$ or $\boxed{x = 3}$

مجموعة الحل $S = \{(6 , 3)\}$

(هـ) $-6 \times 5^x + 25^x + 5 = 0$

$25^x - 6 \times 5^x + 5 = 0$

$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 = 0$

$(5^x - 5)(5^x - 1) = 0$

$5^x - 5 = 0$

$5^x = 5 \quad \boxed{x = 1}$

or $5^x - 1 = 0$

$5^x = 1 \rightarrow 5^x = 5^0$

$\boxed{\therefore x = 0}$

(و) $6^{x^2 - 3x - 2} = 36$

$6^{x^2 - 3x - 2} = 6^2$

$x^2 - 3x - 2 = 2$

$x^2 - 3x - 2 - 2 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$x - 4 = 0 \quad \boxed{x = 4}$

or $x + 1 = 0$

$x = -1$

$S = \{4 , -1\}$

(ز) $3^{(x^2 + 5x + 4)} = 27^{(-x-4)}$

$3^{(x^2 + 5x + 4)} = 3^{3(-x-4)}$

$x^2 + 5x + 4 = 3(-x - 4)$

$x^2 + 5x + 4 = -3x - 12$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x+4)(x+4) = 0$

$(x+4) = 0$

$x = -4$

(ح) $2^{2x+3} - 57 = 65(2^x - 1)$

$2^{2x} \times 2^3 - 57 = 65 \times 2^x - 65$

$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x - 57 + 65 = 0$

$8 \times 2^{2x} - 65 \times 2^x + 8 = 0$

$(8 \times 2^{2x} - 1)(2^x - 8) = 0$

$8 \times 2^x - 1 = 0 \rightarrow 8 \times 2^x = +1$

$2^x = \frac{1}{8} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2^3} \rightarrow 2^x = 2^{-3}$

$\boxed{x = -3}$ or $2^x - 8 = 0$

$2^x = 8 \rightarrow 2^x = 2^3$

$\boxed{x = 3}$

مج = $\{-3 , 3\}$

(ط) $5(5^x + 5^{-x}) = 26$

$5 \times 5^x + 5 \times 5^{-x} = 26$

$5 \times 5^x + 5 \times \frac{1}{5^x} = 26$

$5 \times 5^x \times 5^x + 5 \times 5^x \times \frac{1}{5^x} = 5^x \times 26$

$5 \times 5^{2x} + 5 = 26 \times 5^x$

$5 \times 5^{2x} - 26 \times 5^x + 5 = 0$

$(5 \times 5^x - 1)(5^x - 5) = 0$

$5 \times 5^x - 1 = 0 \rightarrow 5 \times 5^x = 1$

$5^x = \frac{1}{5} \rightarrow 5^x = 5^{-1}$

$x = -1$ or $5^x - 5 = 0$

$5^x = 5 \rightarrow x = 1$

س2/ حل المعادلة في R : $3^{x+1} \times 9^x - 9^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

الحل /

$3^x \times 3 \times 3^{2x} - 3^{2 \times \frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

$3^{3x} \times 3 - 3 \times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

$\left[3^{3x} \times 3 = 3 \times 3^{\frac{3}{x}}\right] \div 3$

$3^{3x} = 3^{\frac{3}{x}}$

$3x = \frac{3}{x}$

$3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = \frac{3}{3} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$S = \{1 , -1\}$

س3/ حل المعادلة التالية : $\frac{(243)^{x-1} \times (27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$

الحل /

$\frac{(3^5)^{x-1} \times (3^3)^{x-2}}{(3^6)^{\frac{1}{2}x}} = 81 \rightarrow \frac{3^{5x} \times 3^{-5} \times 3^{3x} \times 3^{-6}}{3^{3x}} = 81$

$3^{5x + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 5 - 6} = 3^4 \rightarrow 3^{5x-11} = 3^4 \rightarrow 5x - 11 = 4$

$5x = 4 + 11 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{5} \rightarrow x = 3$

س4/ جد قيمة $x \in R$ اذا علمت

(أ) $3^{x^2-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2+1} = 39$

الحل /

$$3^{x^2} \times 3^{-1} + 3^{x^2} + 3^{x^2} \times 3 = 39$$

$$3^{x^2}(\frac{1}{3} + 1 + 3) = 39$$

$$3^{x^2}(\frac{1+3+9}{3}) = 39$$

$$3^{x^2} \times \frac{13}{3} = 39$$

$$\frac{3^{x^2} \times 13}{3} = \frac{39}{1}$$

$$3^{x^2} \times 13 = 117$$

$$3^{x^2} = \frac{117}{13}$$

$$3^{x^2} = 9$$

$$3^{x^2} = 3^2$$

$$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

(ب) $\frac{4^x + 4(2^x) + 3}{4^x + 2^x} = 25$

الحل /

$$\frac{(2^2)^x + 4(2^x) + 3}{(2^2)^x + 2^x} = 25$$

$$\frac{2^{2x} + 4\times2^x + 3}{2^{2x} + 2^x} = 25$$

$$\frac{(2^x + 3)(2^x + 1)}{2^x(2^x + 1)} = 25$$

$$\frac{(2^x + 3)}{2^x} = 25$$

$$(2^x + 3) = 25\times2^x$$

$$2^x - 2^x + 3 = (25\times2^x) - 2^x$$

$$+3 = (24\times2^x)$$

$$2^x = \frac{3}{24} \rightarrow 2^x = \frac{1}{8}$$

$$2^x = \frac{1}{2^3} \rightarrow 2^x = 2^{-3}$$

$x = -3$ اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس

العمليات على الجذور

[3 – 3] الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لايمكن ايجاد قيمتها بصورة مضبوطة مثل: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[5]{61}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{6}$ تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وبالرجوع الى موضوع الاسس نلاحظ ان هذه الجذور ما هي الا كميات ذات أسس كسرية .

مثلا / $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

الخواص /

(1) $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ وعكس الخاصية صحيح .

مثلا /

$$\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72} \quad , \quad \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$$

$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ وعكس الخاصية صحيح حيث $y \neq 0$

مثلا / $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{21}{3}} = \sqrt{7} \quad , \quad \sqrt[3]{\frac{3x}{2y}} = \frac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}}$

مثال1/ رتب الجذور الاتية تصاعديا $\sqrt[3]{12} , \sqrt{5} , \sqrt[6]{147}$

ملاحظة / لمقارنة الجذور من انواع مختلفة حسب مقاديرها يجب تحويل هذه الجذور الى صنف (نوع) واحد أي ذات دليل واحد ويكون احد المضاعفات المشتركة للادلة ويفضل المضاعف المشترك الاصغر لها .

الحل /

$$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$

$$\sqrt[6]{147} = \sqrt[6]{147}$$

الترتيب يكون $\sqrt{5} , \sqrt[3]{12} , \sqrt[6]{147}$

مثال2/ رتب الجذور الاتية تنازليا $\sqrt[6]{5} , \sqrt[3]{2} , \sqrt[9]{10}$

الحل / المضاعف المشترك الاصغر لادلة الجذور هو (18)

$$\sqrt[18]{10^2} , \sqrt[18]{2^6} , \sqrt[18]{5^3}$$

$$\sqrt[18]{100} , \sqrt[18]{64} , \sqrt[18]{125}$$

فيكون الترتيب $\sqrt[18]{125} , \sqrt[18]{100} , \sqrt[18]{64}$

اذن الترتيب هو $\sqrt[6]{5} , \sqrt[9]{10} , \sqrt[3]{2}$

[4 – 3] العددان المترافقان Conjugate Numbers $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

نعلم ان العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت الى كمية نسبية

فالعامل المنسب للمقدار $2\sqrt{3}$ هو $\sqrt{3}$ لان $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{3}$ هو $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3}$ لان $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

والعامل المنسب للمقدار $5 + \sqrt{6}$ هو مرافقه $5 - \sqrt{6}$

لان ضربهما $(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6}) = 25 - 6 = 19$

والعامل المنسب للمقدار $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ هو $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

لان $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = 9 \times 2 - 4 \times 5 = -2$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{5} - 1$ هو $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$

لان $(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1) = \sqrt[3]{125} - 1 = 5 - 1 = 4$ (فرق بين مكعبين)

مثال2/ بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية : $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

الحل /

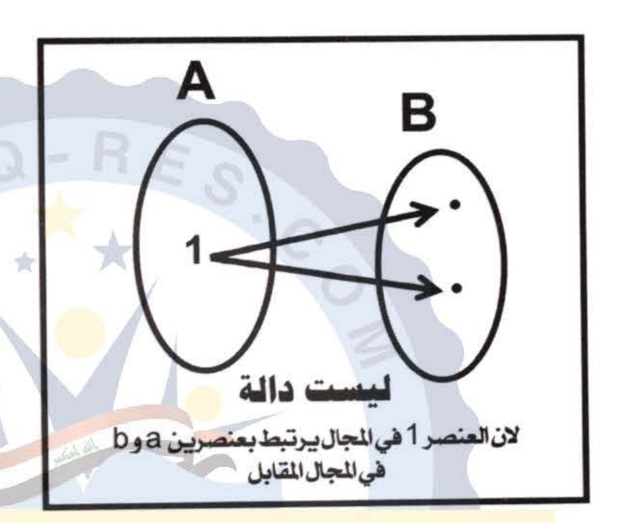
$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

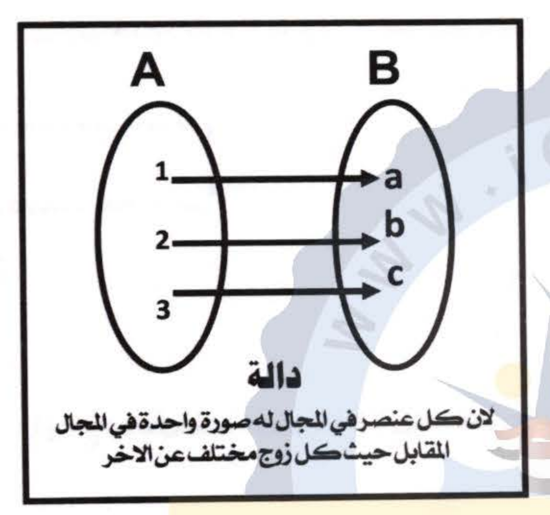
$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}$$

$$= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 3$$

الدوال الحقيقية

مفهوم الدالة / اذا كانت العلاقة من مجموعة (A) الى المجموعة (B) حيث كل عنصر من المجموعة (A) له صورة واحدة في المجموعة (B) أي انه كل زوج يظهر لنا مرة واحدة .





التعبير الرياضي للدالة : حيث يعبر عن الدالة بالصيغة الرمزية الاتية :

$f : A \rightarrow B$ حيث يقرأ (f دالة من A الى B)

حيث $\forall x \in A$ ، يوجد $y = f(x) \in B$

(1) اذا كان الزوج المرتب (x,y) ينتمي الى بيان الدالة f .

$f(x) = x \rightarrow y$ حيث (y) هو صورة العنصر x تحت تأثير الدالة (f) .

(2) تتعين الدالة من ثلاث مكونات وهي :

(a) المجال : وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (x) اذا كان (x,y) ينتمي الى بيان الدالة f .

(b) المجال المقابل : وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (y) اذا كان (x,y) ينتمي الى بيان الدالة f .

(c) قاعدة الدالة f : هي العلاقة التي تربط عناصر (A) بعناصر (B) أي ان $y = f(x)$.

(3) تعطى قاعدة الدالة بأحد الطريقتين الاتيتين :

(a) ذكر بيان الدالة $f : A \rightarrow B$ وهذا يعني انها تكتب على شكل ازواج مرتبة

$f = \{(x , y) : y = f(x) , x \in A\}$

(b) او يذكر المعادلة التي تقوم بربط المتغير (x) بالمتغير (y)

الدوال الحقيقية

تسمى الدالة $f : A \rightarrow B$ دالة حقيقية اذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) هما مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية (R) .

حيث $R \subseteq$ المجال المقابل ، المجال = $\{x : x \in R \quad , \quad f(x) \in R\}$

أوسع مجال للدالة f في R :
هو مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى (A) والتي يكون عندها f(x) E R

ملاحظة مهمة

((عندما تعطى قاعدة دالة ويطلب تحديد مجالها , فان المجال سيكون اوسع مجال ممكن في R))

أوسع مجال للدالة

أولا / اذا كانت الدالة f(x) كثيرة الحدود فان اوسع مجال للدالة هو R .

مثال1/ اوجد اوسع مجال للدالة $f(x) = 3x^2 + 7$

الحل / اوسع مجال للدالة هو R (لان الدالة كثيرة الحدود)

مثال2/ عين مجال الدالة f (اوسع مجال للدالة) اذا كانت $f(x) = x^2$

الحل / $\because$ x^2 معرفة دوما في R مهما كانت $x \in R$

$\therefore$ اوسع مجال للدالة هو R أي مجال f = R

كيف نتعرف على الدوال الكثيرة الحدود (ماهي مواصفاتها)

(a) مجال الدالة فيها ومجالها المقابل = R (او مجموعة جزئية من R) .
(b) قاعدة الدالة تتكون من حد واحد او عدة حدود .
(c) ان اس (x) في أي حد من حدود الدالة يكون عدد طبيعي .

صور الدوال الكثيرة الحدود

(a) **الدالة الثابتة :** حيث $f(x) = a$, (حيث a عدد ثابت) فان $a \in R$.
تمثله كل الدوال الثابتة: $f(x) = 17$, $f(x) = \sqrt{3}$, $f(x) = -8$

(b) **الدالة الخطية :** حيث $f(x) = ax + b$ $[a , b \in R , a \neq 0]$
امثلة على الدالة الخطية: $f(x) = \sqrt{2}x + 12$, $f(x) = 6x + 11$

(c) **الدالة التربيعية :** $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a , b , c \in R , a \neq 0)$
امثلة على الدوال التربيعية: $f(x) = 3x^2 + 5x - 5$
$f(x) = 9x^2 - 4$

(d) **الدالة التكعيبية :** مثل $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

ثانيـا / اذا كانت الدالة كسرية (مكونة من بسط ومقام) فان اوسع مجال للدالة هو R ماعدا الاعداد التي تجعل المقام = صفر .

مثال3/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$

الحل / نجعل المقام مساويا للصفر ← $x^2 - 5x + 6 = 0$

نقوم بتحليل المعادلة بواسطة التجربة ← $(x - 3)(x - 2) = 0$

ايجاد قيم (x) التي تجعل المقام مساويا للصفر اما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

او $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

∴ اوسع مجال للدالة f هو $R / \{2,3\}$

ثالثـا / اذا كانت الدالة تحتوي جذر دليله زوجي فان اوسع مجال للدالة يستخرج كما يلي :

(a) اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله زوجي والجذر في البسط تحديدا , فان اوسع مجال للدالة هو R ماعدا العدد الذي يجعل القيمة التي تحت الجذر ≥ صفر .

مثال4/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x + 7}$ الدليل وهو زوجي

الحل / ∵ الدالة دليلها زوجي (تربيعي)

∴ الجذر يقع في البسط

$x + 7 \geq 0$

$x \geq -7$

∴ اوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R \ , x \geq -7\}$

(b) اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله زوجي والجذر يقع في المقام تحديدا , فان اوسع مجال للدالة هو R ماعدا الاعداد التي تجعل القيم التي تحت الجذر التربيعي > صفر .

مثال5/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x + 6}}$

الحل / ∵ دليل الجذر زوجي (تربيعي) والجذر يقع في المقام

$3x + 6 > 0$

$3x > -6$

$\frac{1}{3} \times 3x > \frac{1}{3} \times -6^{2}$

$x > -2$

∴ اوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R \ , x > -2\}$

رابعا / اذا كانت الدالة تحتوي على جذر دليله فردي وكان الجذر في البسط تحديدا , فان اوسع مجال للدالة هو R .

مثال6/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt[5]{X - 4}$

الحل / ∵ الجذر في البسط ودليله فردي وهو (5)

∴ اوسع مجال للدالة هو R

خامسا / اذا كانت الدالة تحوي على جذر دليله فردي والجذر يقع في المقام فان اوسع مجال للدالة هو R ماعدا الاعداد التي تجعل المقام يساوي صفر .

مثال7/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{X - 5}}$

الحل / $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{5\}$

مثال8/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \dfrac{1}{3x + 5}$

الحل /
$$3x + 5 = 0$$
$$3x = -5$$
$$x = \frac{-5}{3}$$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R / \left\{\frac{-5}{3}\right\}$

مثال9/ جد اوسع مجال للدالة $f(x) = \sqrt{x}$

الحل / $x \geq 0$

∴ اوسع مجال مجال للدالة f هو

$\{x : x \in R , x \geq 0\}$

مثال10/ اوجد اوسع مجال للدالة $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

الحل /
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R / \{1\}$

التمثيل البياني للدوال الحقيقية

الجدول الاتي لبعض الدوال المرتبة :

تمثيل الدالة $a , b \in R , a \neq 0 , f(x) = ax^2 + b$

- هذه الدالة يمثلها قطعا مكافئا راسه النقطة $(0,y)$

ويكون بشكل

- $\cup$ بيانها يقع في النصف الاعلى من المستوي الاحداثي
- $\cap$ بيانها يقع في النصف الاسفل من المستوي الاحداثي

اولا / تمثيل الدالة الخطية :

$f : R \to R$ حيث $f(x) = ax + b$ حيث $a , b \in R$ لتمثيل هذه الدالة نأخذ نقطتين (على الاقل) من مجال الدالة ونجد $f(x)$ لكل نقطة ونعين الازواج المرتبة $(x , f(x))$ في المستوي الديكارتي ونصل بينهما بمستقيم .

مثال1/ مثال الدالة $f : R \to R$ بحيث $f(x) = x - 2$ بيانيا ؟

الحل / ان التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم

فعندما $x=1$ مثلا فان $y = f(1) = 1 - 2 = -1$

وعندما $x=2$ فان $y = f(2) = 2 - 2 = 0$

x	y	(x,y)
1	-1	(1,-1)
2	0	(2,0)
0	-2	(0,-2)

وعلى ذلك فان الزوجان المرتبطان $a(1,-1),b(2,0)$ ينتميان الى بيان الدالة وتعينان النقطتين a, b ويكون المستقيم (ab) هو المستقيم المطلوب .



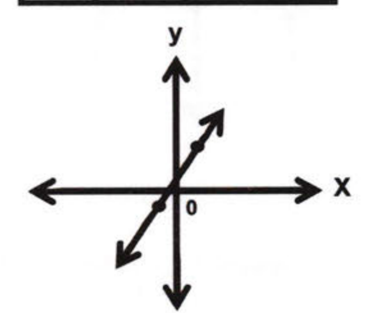
مثال2/ مثل الدالة $f : R \to R$ بحيث $f(x) = 2x + 1$ بيانيا ؟

الحل /

$f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$

$f(-1) = (2 \times -1) + 1 = -1$

x	y	(x,y)
1	3	(1,3)
-1	-1	(-1,-1)



مثال 3/ مثل الدالة $f : R \to R$ بحيث $f(x) = 2$ بيانيا ؟

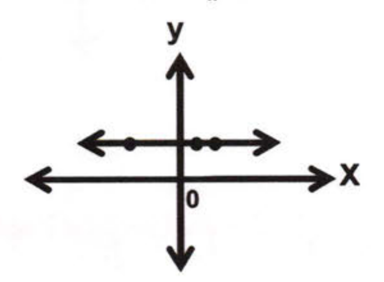
$f(1) = 2$

$f(2) = 2$

$f(-3) = 2$

x	y	(x,y)
1	2	(1,2)
2	2	(2,2)
-3	2	(-3,2)

تسمى هذه الدالة بالدالة الثابتة وتمثل مستقيما يوازي محور السينات



ثانيا / التمثيل البياني للدالة التربيعية :

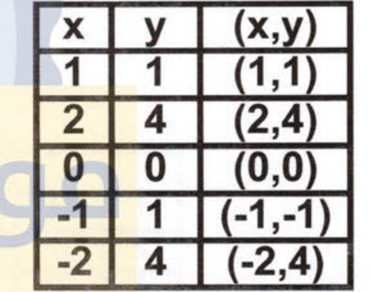
لتمثيل مثل هذه الدوال نأخذ خمس قيم (على الاقل) لـ (x) من مجال الدالة ونجد f(x) لكل منها بأستخدام قاعدة التعريف التالية :

تعريف

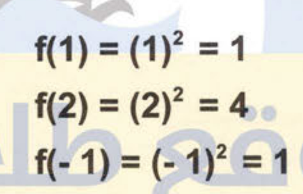
التمثيل البياني للدالة $f : R \rightarrow R$ بحيث $f(x) = ax^2 + b$ حيث $a , b \in R$ وان $a \neq 0$ وهي تمثل منحنيا وليس مستقيما .

مثال4/ مثل الدالة $f : R \rightarrow R$ بحيث $f(x) = x^2$ بيانيا ؟

الحل / نأخذ خمس قيم لـ(x) ونعوضها في $f(x) = x^2$



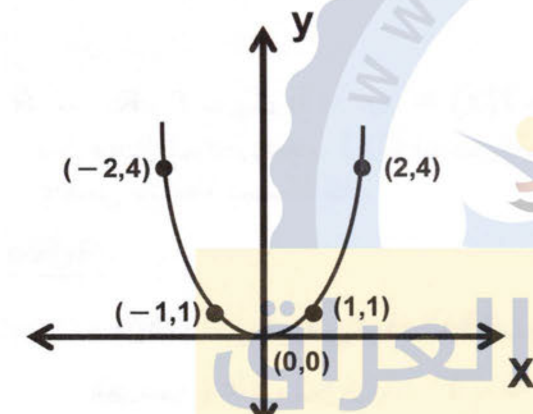
x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	4	(2,4)
0	0	(0,0)
-1	1	(-1,-1)
-2	4	(-2,4)



$f(1) = (1)^2 = 1$

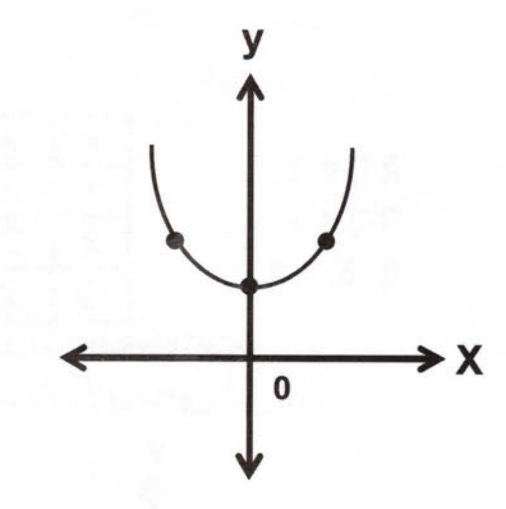
$f(2) = (2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$



مثال 5/ مثل الدالة $f(x) = 2x^2 + 3$

x	-1	0	-1
y	5	3	5



مثال 6/ مثل الدالة $f(x) = -4x^2$

x	1	0	-1
y	-4	0	-4

اطلب النسخة الاصلية من مكتب الشمس حصرا

مثال 7/ مثل الدالة $f : R \to R$ بحيث $y = x^2 + 3$ بيانيا ؟

الحل /

x	y	(x,y)
1	4	(1,4)
2	7	(2,7)
0	3	(0,3)
-1	4	(-1,4)
-2	7	(-2,7)

$y = (1)^2 + 3 = 4$

$y = (2)^2 + 3 = 7$

$y = (0)^2 + 3 = 3$

$y = (-1)^2 + 3 = 4$

$y = (-2)^2 + 3 = 7$

مثال 8/ مثل الدالة $f : R \to R$ بحيث $y = 1 - x^2$ بيانيا ؟

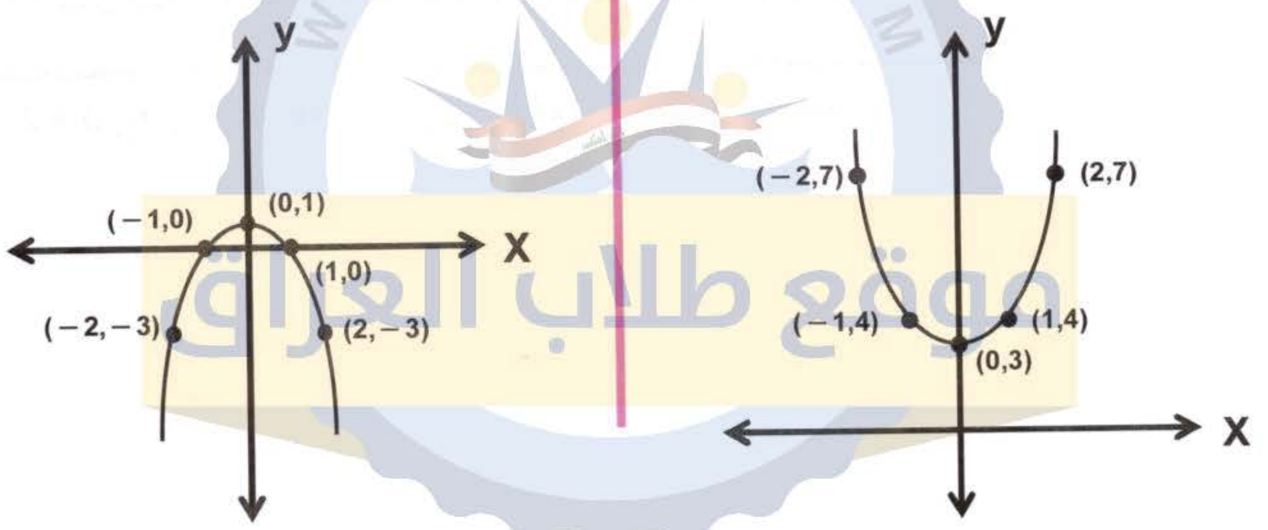
x	y	(x,y)
1	0	(1,0)
2	-3	(2,-3)
0	1	(0,1)
-1	0	(-1,0)
-2	-3	(-2,-3)

$f(1) = 1 - (1)^2 = 0$

$f(2) = 1 - (2)^2 = -3$

$f(0) = 1 - (0)^2 = 1$

$f(-1) = 1 - (-1)^2 = 0$



ثالثا / تمثيل الدالة التكعيبية

تمثيل الدالة $a , b \in R , a \neq 0 , f(x) = ax^3 + b$

مثال 1/ مثل الدالة $f(x) = x^3 + 2$

x	1	0	-1
y	3	2	1

مثال 2/ مثل الدالة $f(x) = -x^3$

x	1	0	-1
y	−1	0	1

رابعا / تمثيل الدالة $f_a(x) = a^x$

لقد تعرفنا على الرمز a^x حيث كان الاس عددا نسبيا , ورأينا ان قوانين الاسس في حالة كون الاس عددا صحيحا , بقيت نفسها عندما اصبح الاس عددا نسبيا .
واذا كان a عددا حقيقيا موجبا $(a \neq 1)$, وكان x عددا حقيقيا فالرمز a^x يدل على قوة العدد (اسها x واساسها a) .

تعريف (3 - 3)

> اذا كان $a \in R^+/\{1\}$, $x \in R$ وكان $f(x) = a^x$
> فان f(x) تسمى الدالة الاسية للاساس a (Exponential Function)

فمثلا / $f_2(x) = 2^x$, $g_3(x) = 3^x$, $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x$

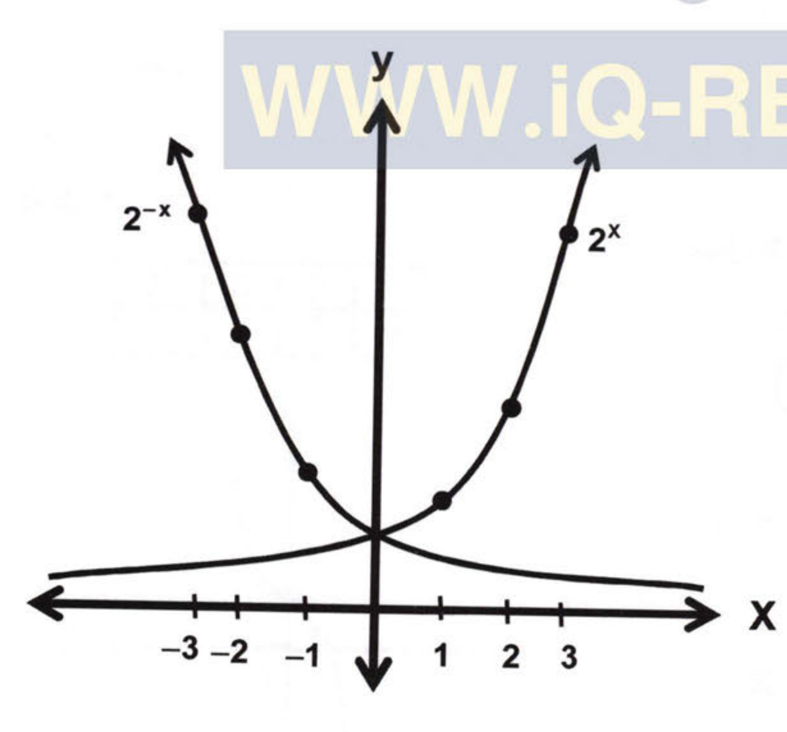
مثال9/

(أ) جد قيم الدالة $f(x) = 2^x$ من اجل $x = 3 , 2 , 1 , 0 , -1 , -2 , -3$
ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحني هذه الدالة .

(ب) ابحث عن طريقة للافادة من المنحني السابق في رسم جزء من منحني هذه الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$ على الشكل نفسه

الحل / (أ) $f(x) = 2^x$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
2^x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



(ب) $g(x) = (\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$

ولنفرض R_y تناظر بالنسبة لمحور الصادات

$R_y : (x , y) = (- x , y)$

أي ان صورة $(x , 2^x) = (- x , 2^x)$

لذلك فاننا نحصل على منحني لدالة

$g(x) = (\frac{1}{2})^x$ من المنحني $f(x) = 2^x$

بالتناظر حول محور الصادات

كما موضح في الشكل (1 – 3)

بعض خصائص الدالة الاسية $f(x) = a^x$

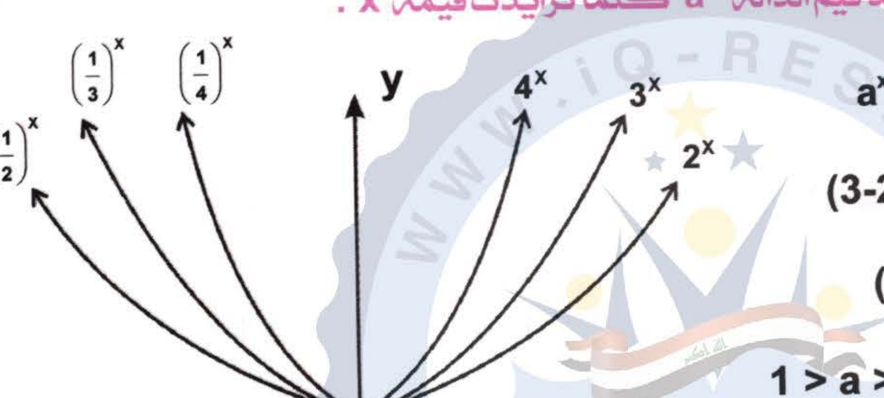
(1) اذا قمنا برسم منحنيات الدوال : 2^x , 3^x , 4^x , 5^x,..........

وكذلك الدوال : $(\frac{1}{2})^x$, $(\frac{1}{3})^x$, $(\frac{1}{4})^x$, $(\frac{1}{5})^x$, ...

فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات :

الاولى : عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .

الثانية : عندما $1 > a > 0$



حيث تتناقص قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .
وقد رسمنا في الشكل (3-2) ستة من هذه المنحنيات (رسم جزء من كل منحني) ثلاثة فيها $a > 1$ وثلاثة منها اخرى فيها $1 > a > 0$ وقد اخترنا قيم a في هذه الأخيرة مقلوبات قيم a في الثلاثة الاولى ونلاحظ ان جميع هذه المنحنيات تمر بالنقطة $(0 , 1)$

(2) بالرجوع الى المنحني البياني لاية دالة اسية a^x , $a \neq 0$ نجد ان مجالها R .

س / اضافي / جد مجال كل من الدوال التالية :

(أ) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$

الحل / ∵ الدالة كثيرة الحدود

∴ اوسع مجال للدالة هو R

(ب) $f(x) = \frac{2x + 6}{x^2 - x - 6}$

الحل / $x^2 - x - 6 = 0$

$(x - 3)(x + 2) = 0$

اما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

او $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$

∴ مج = $S = \{3 , -2\}$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{3 , -2\}$

(جـ) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

الحل / $4 - x \geq 0$

$-\cancel{4} + \cancel{4} - x \geq 0 - 4$

$[-x \geq -4] \times -1$

$x \leq 4$

∴ اوسع مجال للدالة هو

$\{x : x \in R , x \leq 4\}$

(د) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

الحل / $x + 2 \geq 0$

$x + \cancel{2} - \cancel{2} \geq 0 - 2$

$x \geq -2$

∴ اوسع مجال للدالة $\{x : x \in R , x \geq -2\}$

حلول تمارين (3 – 3)

س1/ (أ) / اختصر $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$

الحل/

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\left[\frac{(a+b)-(a-b)}{\sqrt{a-b}\times\sqrt{a+b}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)}\left[\frac{\cancel{a}+b-\cancel{a}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)}\left[\frac{2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)}\times\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{(\sqrt{a^2-b^2})^2}{2b(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{2b\,(a+b)}$$

$$=\frac{(a-b)\cancel{(a+b)}}{2b\,\cancel{(a+b)}}=\frac{a-b}{2b}$$

(ب) اذا كان $y=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$, $x=\sqrt[3]{2}+1$ فأثبت ان $xy=3$.

الحل/

الطرف الايسر $=(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$ ← هذا ناتج مجموع مكعبي حدين

نعيده الى وضعه الاصلي $=(\sqrt[3]{2})^3+1$

الطرف الايمن $=2+1=3$ =

س2/ مثل الدوال التالية :

الحل/

(a) $f(x)=-4x^2+5$

$f(1)=-4(1)^2+5=1$

$f(2)=-4(2)^2+5=-3$

$f(0)=-4(0)^2+5=5$

$f(-1)=-4(-1)^2+5=1$

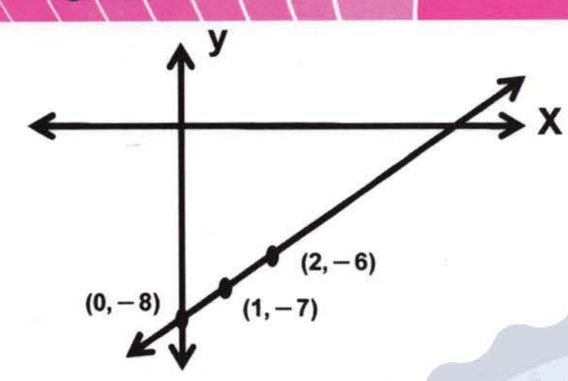
$f(-2)=-4(-2)^2+5=-3$

x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	-11	(2,-11)
0	5	(0,5)
-1	1	(-1,1)
-2	-11	(2,-11)

y
(0,5)
(−1,1)
(1,1)
X

(b) $f(x) = x - 8$

الحل /



$f(1) = 1 - 8 = -7$
$f(2) = 2 - 8 = -6$
$f(0) = 0 - 8 = -8$
$f(-1) = -1 - 8 = -9$

x	y	(x,y)
1	-7	(1,-7)
2	-6	(2,-6)
0	-8	(0,-8)
-1	-9	(-1,-9)

(c) $f(x) = 2 - x^3$

الحل/

$f(1) = 2 - (1)^3 = 1$
$f(2) = 2 - (2)^3 = -6$
$f(0) = 2 - (0)^3 = 2$
$f(-1) = 2 - (-1)^3 = 3$

x	y	(x,y)
1	1	(1,1)
2	-6	(2,-6)
0	2	(0,2)
-1	3	(-1,3)

س3/ جد اوسع مجال للدوال التالية :

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 9$

الحل/ اوسع مجال للدالة هو R لان الدالة كثيرة الحدود .
لان أي قيمة عددية حقيقية تعطى الى (x) فان $y \in R$ دائما .

(b) $f(x) = \frac{1 - x}{x + 9}$

الحل /
$x + 9 = 0$
$x = -9$
∴ اوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{-9\}$
لان (9-) يجعل المقام يساوي (صفر) وهذا لاينتمي للاعداد الحقيقية

(c) $f(x) = \sqrt{x - 9}$

الحل/
$x - 9 \geq 0$
$x \geq 9$
∴ اوسع مجال للدالة هو $\{x : x \in R , x \geq 9\}$

(d) $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$

الحل /
$3 - 5x \geq 0$
$-5x \geq -3$
$\frac{-1}{5} \times -5x \leq \frac{-1}{5} \times -3$
$x \leq \frac{3}{5}$
∴ اوسع مجال للدالة هو $\left\{x : x \in R , x \leq \frac{3}{5}\right\}$

(e) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

الحل/

$x^2 - 9 = 0$

$(x - 3)(x + 3) = 0$

اما $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

او $x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R \setminus \{-3 , 3\}$

س4/ اوجد ناتج مايأتي بحيث يكون المقام عدد نسبي :

(أ) $\frac{3}{a - b} \times \sqrt{\frac{2x}{a - b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a - b)^5}}$

الحل/

$$= \frac{3}{a - b} \times \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{a - b}} \div \frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{(a - b)^5}}$$

$$= \frac{3}{(a - b)} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{x}}{(a - b)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{(a - b)^{\frac{5}{2}}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{x} \times x}$$

$$= \frac{(a - b)^{\frac{5}{2}}}{x \times (a - b)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a - b)^{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}}{x} = \frac{(a - b)^{\frac{5 - 3}{2}}}{x} = \frac{(a - b)^{\frac{2}{2}}}{x} = \frac{a - b}{x}$$

(ب) $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})}$

الحل/

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(\frac{3 + 1}{\sqrt{3}})} = \frac{\frac{(3\sqrt{3}\sqrt{3}) - (2\sqrt{2}\sqrt{2})}{3\sqrt{3} \times \sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{(3 \times 3) - (2 \times 2)}{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{9-4}{3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{5}{3\sqrt{3}\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{3 \times 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{5}{24}$$

(جـ) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$

الحل/ $= \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} \times \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}}$

$= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} - \sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}} - \sqrt{\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}}$

$= \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

س5/ اثبت ان : $\dfrac{-15}{x+\sqrt{x}-6} + \dfrac{3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{3}{\sqrt{x}+3} = 0$

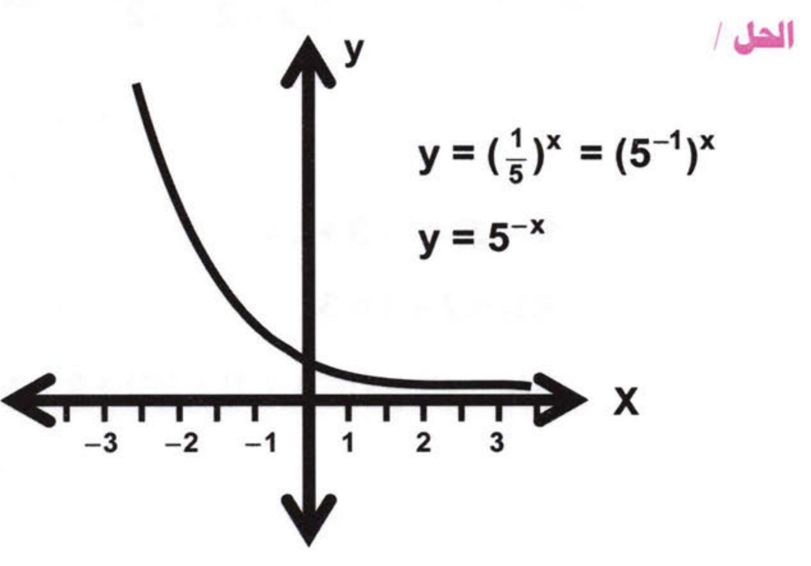
الحل/ الطرف الايسر $= \dfrac{-15}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} + \dfrac{3}{(\sqrt{x}-2)} - \dfrac{3}{(\sqrt{x}+3)}$

$= \dfrac{-15+3(\sqrt{x}+3)-3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = \dfrac{-15+3\sqrt{x}+9-3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$

$= \dfrac{zero}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} = 0 =$ الطرف الايمن

س6/ ارسم جزءا من منحني البياني للدالة $y = (\frac{1}{5})^x$

الحل /



$y = (\frac{1}{5})^x = (5^{-1})^x$

$y = 5^{-x}$

$X = 1 \rightarrow y = (\frac{1}{5})^1 \rightarrow y = \frac{1}{5}$

$X = 2 \rightarrow y = (\frac{1}{5})^2 \rightarrow y = \frac{1}{25}$

$X = 3 \rightarrow y = (\frac{1}{5})^3 \rightarrow y = \frac{1}{125}$

$X = 0 \rightarrow y = (\frac{1}{5})^0 \rightarrow y = 1$

$X = -1 \rightarrow y = (\frac{1}{5})^{-1} \rightarrow y = 5$

$X = -2 \rightarrow y = (\frac{1}{5})^{-2} \rightarrow y = 25$

اسئلة حلول الفصل الثالث

س1/ برهن ان $\dfrac{(2^{x})^{x-1}}{2^{x-1}} \div \dfrac{(2^{x-1})^{x+1}}{4^{x+1}} = 16$

س2/ برهن ان $\dfrac{3^{1-n}}{2^{-(n+1)}} \times \dfrac{25^{1-n}}{9^{-n}} \div \dfrac{30^{n-1}}{(125)^{n-1}} = 36$

س3/ اثبت ان $\dfrac{4^{x} \times 9^{2x+2} \times 3^{2x-5}}{4^{x-2} \times 3^{6x-1}} = 16$

س4/ اثبت ان $\dfrac{2^{n+1} \times 3^{x-5} + 2^{n-1} \times 3^{x-4}}{2^{n} \times 3^{x-3} + 2^{n-2} \times 3^{x-4}} = \dfrac{14}{39}$

س5/ أوجد اوسع مجال للدوال التالية

① $f(x) = \dfrac{12}{\sqrt{x} - 3}$

② $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x-2} - 2}$

③ $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{5-x} - 3}$

④ $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x-2} - 2}$

⑤ $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x-3}}$

⑥ $f(x) = \sqrt{3x+5}$

⑦ $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x-3}}$

⑧ $f(x) = \sqrt[3]{x-4}$

س6/ ليكن $f : R \rightarrow R$ بحيث $f(x) = y = x + 1$ جد

$f(-3), f(2), f[f(-1)], f(1+\Delta x), f(a+2), f(b-3)$

الحل /

$f(-3) = -3 + 1 = -2$

$f(2) = 2 + 1 = 3$

$f[f(-1)] = f[-1+1] = f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(1 + \Delta x) = 1 + \Delta x + 1 = \Delta x + 2$

$f(a+2) = a + 2 + 1 = a + 3$

$f(b-3) = b - 3 + 1 = b - 2$

الفصل الرابع

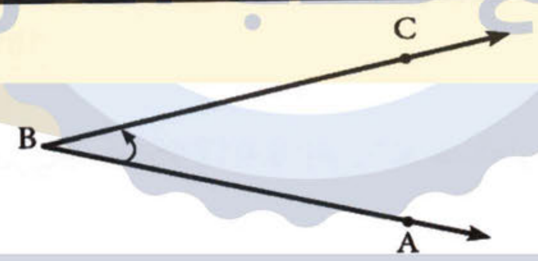
حساب المثلثات

[1 – 4] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي

هي الزاوية التي رأسها نقطة الاصل في المستوي المتعامد المحورين وضعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات وضلعها النهائي في احد الارباع .

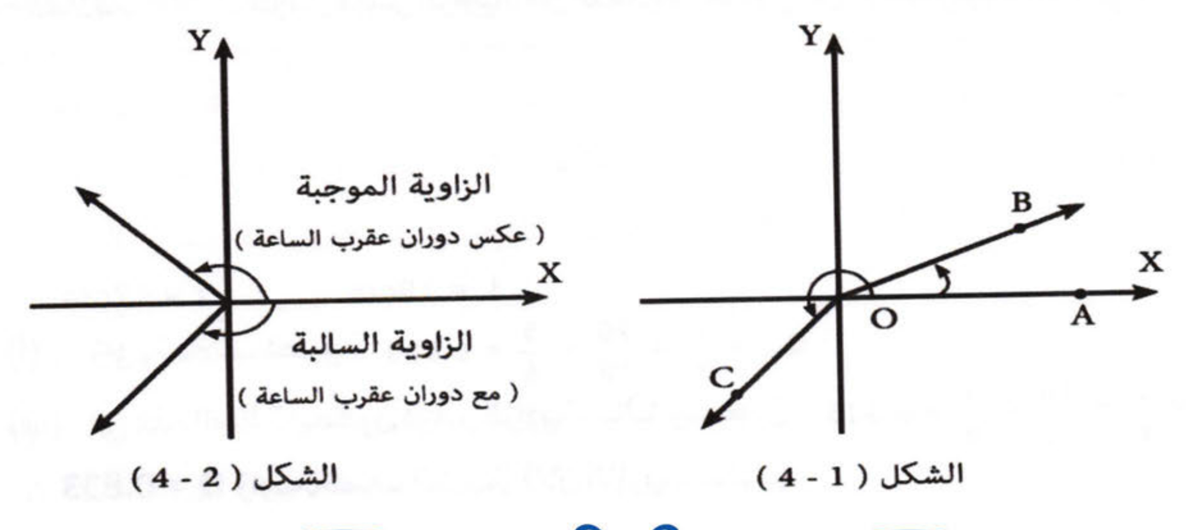
تعريف [1 – 4]

الزاوية الموجهة Directed Angle : اذا كان للشعاعين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ نقطة بداية مشتركة هي B فان الزوج المرتب $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{BA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{BC}$ ورأسها النقطة B وتكتب باحدى الطريقتين
$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$ أو $\overleftrightarrow{ABC}$



تعريف [2 – 4]

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي : اذا كان لدينا نظام احداثي متعامد المحورين في المستوي وزاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية في وضع قياسي اذا وقع رأسها في نقطة الاصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل (1 – 4)



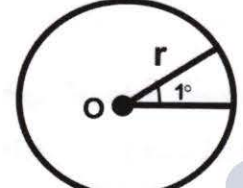
الشكل (2 - 4)   الشكل (1 - 4)

[3 – 3] العلاقة بين التقديرين الستيني والدائري لقياس الزوايا

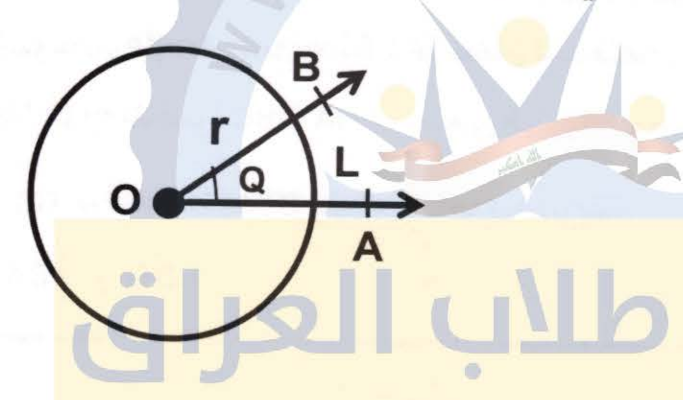
وكما نعلم في المرحلة المتوسطة فأنه :

اذا قسمنا دائرة الى $360°$ قسما متساويا فاننا نحصل على $360°$ قوسا متساويا , كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في القياس الستيني Degree Measure ويرمز له ($1°$)

فالقياس الستيني / هي الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله $\frac{1}{360°}$ من محيط الدائرة



القياس الدائري / هي قياس الزاوية المركزية التي تقابل قوسا طوله مساوي لنصف قطر الدائرة .



كما ان : $1° = 60$ دقيقة $= 60'$

$1' = 60$ ثانية $= 60''$

ذكرنا سابقاً ان محيط الدائرة $= 2\pi r$

وبما ان $Q = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r}$

$\therefore 2\pi$ زاوية نصف قطرية $= 360°$

$\Leftarrow \pi$ زاوية نصف قطرية $= 180°$

$\therefore 1$ زاوية نصف قطرية $= \frac{180°}{\pi}$

$\therefore 1° = \frac{\pi}{180°}$ زاوية نصف قطرية $= 0.01745$ زاوية نصف قطرية

وبصورة عامة :

(أ) اذا كان قياس زاوية موجهة $= Q$ (من الزوايا النصف قطرية) فان $Q = \frac{D° \times \pi}{180°}$

(ب) اذا كان قياس زاوية موجهة $= D°$ فان $D° = \frac{Q \times 180°}{\pi}$

ومنه نستنتج ان : $\boxed{\frac{Q}{D°} = \frac{\pi}{180°}}$

تستخدم العلاقة اعلاه لتحويل قياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس .

مثال1/ اذا كانت $m\overrightarrow{AOB}$ في وضع قياسي تقابل طوله 10سم في دائرة طول نصف قطرها 12سم

(أ) احسب بالتقدير الدائري $m\overrightarrow{AOB}$ حيث : $0 \le m\angle AOB \le 2\pi$ علما ان مركز الدائرة هو نقطة الاصل

(ب) احسب بالتقدير الدائري $m\overrightarrow{AOB}$ حيث : $-2\pi < m\angle AOB \le 0$

الحل / $r = 12cm \quad , \quad L = 10cm$

(أ) $\therefore$ زاوية نصف قطرية $|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$

(ب) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالبا ويكون : $|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$

$\therefore Q = -0.833$ زاوية نصف قطرية (لان الزاوية سالبة)

مثال2/ اذا كانت $\angle \overrightarrow{AOB}$ في وضعها القياسي وكان قياسها $\frac{3\pi}{4}$ فما قياسها بالتقدير الستيني ؟

الحل / $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{3}{4} = 135^\circ$$

مثال3/ حول (أ) 40° الى التقدير الدائري . (ب) 75° الى التقدير الدائري .

(جـ) 2.6π الى التقدير الستيني. (د) $\frac{1}{4}\pi$ الى التقدير الستيني .

الحل /

(أ) من الزاوايا النصف قطرية $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{40^\circ} \rightarrow Q = \frac{2\pi}{9}$

(ب) من الزاوايا النصف قطرية $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{75^\circ} \rightarrow Q = \frac{5\pi}{12}$

(جـ) $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ \times 2.6 = 468^\circ$

(د) $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$

مثال4/ حول (أ) 45° الى التقدير الدائري . (ب) 2.6π الى التقدير الستيني .

الحل / (أ) من الزاوايا النصف قطرية $\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{Q}{45^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{4}$

(ب) $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{2.6\pi}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow D^\circ = 2.6 \times 180^\circ = 468^\circ$

مثال5/ زاوية مركزية قياسها 60° فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9cm ؛

الحل / $\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \rightarrow Q = \frac{1}{3}\pi$

$$\because |Q| = \frac{L}{r} \rightarrow \therefore \frac{\pi}{3} = \frac{L}{9} \rightarrow L = \frac{9\pi}{3} \rightarrow L = 3\pi \rightarrow L = 3 \times 3.142 = 9.426 \text{ cm}$$

مثال6/ زاوية مركزية طول قوسها $21\frac{1}{4}$ cm وطول نصف قطر دائرتها 20 cm فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحل / من الزاوايا النصف قطرية $|Q| = \frac{L}{r} \rightarrow |Q| = \frac{21\frac{1}{4}}{20} = \frac{17}{16}$

$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow \frac{\frac{17}{16}}{D} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$D^\circ = \frac{17}{16} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} = 60.85^\circ$$

مثال7/ في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟

الحل /

$$\because \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow \frac{0.44}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\therefore D^\circ = \frac{0.44 \times 180}{\pi} = \frac{0.44 \times 180}{3.14} = 25.2^\circ$$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما A , B

$A + B = 90^\circ$.........1

$A - B = 25.2^\circ$ ......2 بالجمع

$2A = 115.2$

$\therefore A = 57.6^\circ$

$B = 32.4^\circ$

مثال8/ زاوية مركزية طول قوسها 22cm وطول نصف قطر دائرتها 20cm فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحل / من الزاوايا النصف قطرية $= \frac{L}{r} = \frac{22}{20}$ قياس الزاوية المركزية بالدائري

$$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{22}{20}}{D^\circ}$$

$$\therefore D = \frac{22}{20} \times \frac{180^\circ}{\frac{22}{7}}$$

$$\therefore D = \frac{22}{20} \times \frac{180^\circ}{1} \times \frac{7}{22} = 63^\circ$$ القياس بالتقدير الستيني

حلول تمارين (1 - 4)

س1/ حول الى التعبير الدائري كل من قياس الزوايا الاتية : 300° , 15° , 120° , 30°

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{30^\circ} \rightarrow Q = \frac{30 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{120^\circ} \rightarrow Q = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{15^\circ} \rightarrow Q = \frac{15 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{300^\circ} \rightarrow Q = \frac{300 \times \pi}{180} = \frac{5}{3}\pi$$

س2/ حول كلا من الزوايا النصف قطرية الاتية الى التقدير الستيني : $\frac{1}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{5}$

الحل /

$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$	$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$	$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$
$\frac{\frac{3\pi}{5}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$	$\frac{\frac{5\pi}{6}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$	$\frac{\frac{1}{3}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$
$\pi \times D^\circ = \frac{3\pi}{5} \times 180^\circ$	$\pi \times D^\circ = \frac{5\pi}{6} \times 180^\circ$	$D^\circ = \frac{\frac{1}{3} \times 180^\circ}{\pi} = \frac{60^\circ}{\pi} = \frac{60^\circ}{\frac{22}{7}}$
$D^\circ = \frac{3\pi \times 36^\circ}{\pi}$	$\pi \times D^\circ = 5\pi \times 30^\circ$	$D^\circ = \frac{\overset{30}{60} \times 7}{\underset{11}{22}} = \frac{210}{11}$
$D^\circ = 108^\circ$	$D^\circ = \frac{5\pi \times 30^\circ}{\pi}$	$D^\circ = 19\frac{1}{11}$
	$D^\circ = 150^\circ$	

س3/ قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا النصف قطرية تقابل قوسا طوله (25 cm) جد طول نصف قطر الدائرة ؟

الحل /

$$Q = \frac{L}{r} \rightarrow r = \frac{L}{Q} \rightarrow r = \frac{25}{\frac{5}{6}}$$

$$r = \overset{5}{25} \times \frac{6}{5} \rightarrow r = 30cm$$ طول نصف قطر الدائرة

س4/ ماطول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها °135 في دائرة نصف قطرها (8 cm) ؟

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{135^\circ} \rightarrow Q = \frac{135}{180^\circ} \rightarrow Q = \frac{3}{4}\pi$$

$$L = Q \times r \rightarrow L = \frac{3}{4}\pi \times 8 = 6\pi$$

طول القوس $L = 6 \times 3.14 \rightarrow L = 18.857\ cm$

س5/ زاويتان مجموعهما $\frac{\pi}{4}$ زاوية نصف قطرية وفرقهما يساوي °9

فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستيني ؟

الحل /

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow D^\circ = \frac{180 \times Q}{\pi} \rightarrow D^\circ = \frac{180 \times \frac{\pi}{4}}{\pi}$$

$D^\circ = \frac{180^\circ}{1} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\pi} = 45^\circ$ مجموع الزاويتين بالتقدير الستيني

$x + y = 45^\circ$ نفرض ان الزاوية الاولى = X

$x - y = 9^\circ$ نفرض ان الزاوية الثانية = y

$2x = 54$

$x = \frac{54}{2} = 27^\circ$ قيمة الزاوية الاولى

$y = 45^\circ - 27^\circ = 18^\circ$ قيمة الزاوية الثانية

س6/ ارسم الزاوية $\overrightarrow{AOB}$ في وضعها القياسي اذا كان قياسها $\frac{5\pi}{4}$ ثم جد قياسها بالتقدير الستيني ؟

الحل /

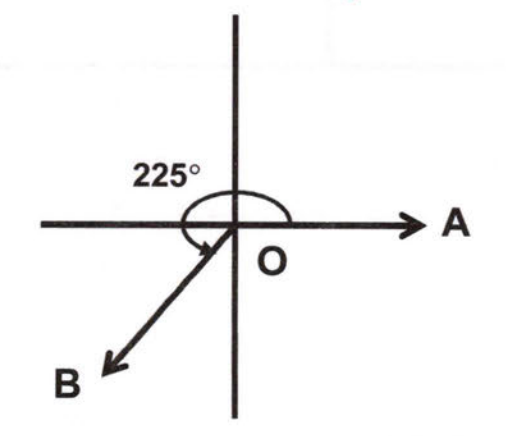
$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ}$$

$$D^\circ = \frac{180 \times Q}{\pi}$$

$$D^\circ = \frac{180 \times \frac{5\pi}{4}}{\pi}$$

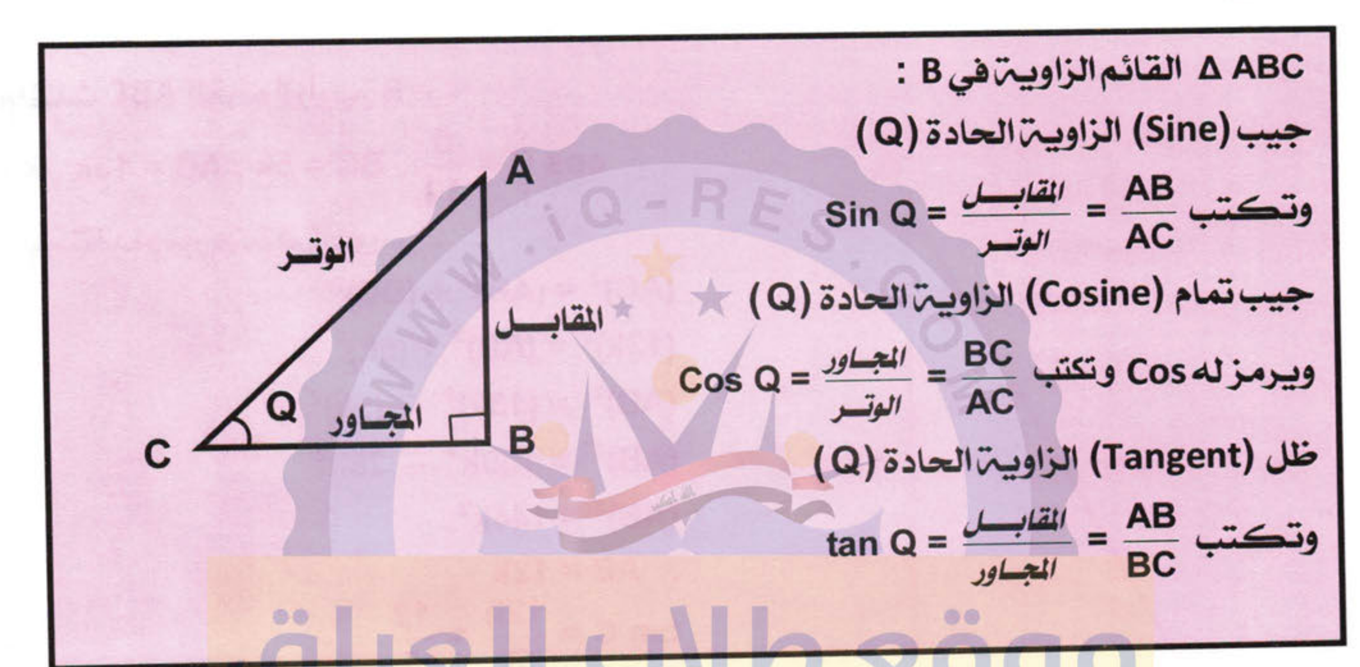
$$D^\circ = \frac{180}{1} \times \frac{5\pi}{4} \times \frac{1}{\pi}$$

$$D^\circ = 45 \times 5 = 225$$



[4 – 3] النسب المثلثية لزاوية حادة

تعريف [2 – 3]



Δ ABC القائم الزاوية في B :

جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{Sin } Q$

جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q)

ويرمز له Cos وتكتب $\frac{BC}{AC} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{Cos } Q$

ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \tan Q$

ملاحظة/

من النسب المثلثية لزاوية حادة $\text{Sin } Q , \text{Cos } Q \; [-1 , 1]$

$\text{Sin } 0 = 0 , \text{Sin } 90^\circ = 1$

$\text{Cos } 0 = 1 , \text{Cos } 90^\circ = 0$

$\tan 0 = 0 , \tan 90^\circ$ غير معرفة

[5 – 3] بعض العلاقات الاساسية في حساب المثلثات

الشكل (4 – 3) يمثل مثلثا قائم الزاوية في B والزاوية الحادة Q :

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ABC نجد ان :

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ بقسمة كل الحدود على $(AC)^2$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{\text{Sin}^2 Q + \text{Cos}^2 Q = 1}$$

كذلك $\tan Q = \frac{AB}{BC}$

بالقسمة على (AC) ينتج

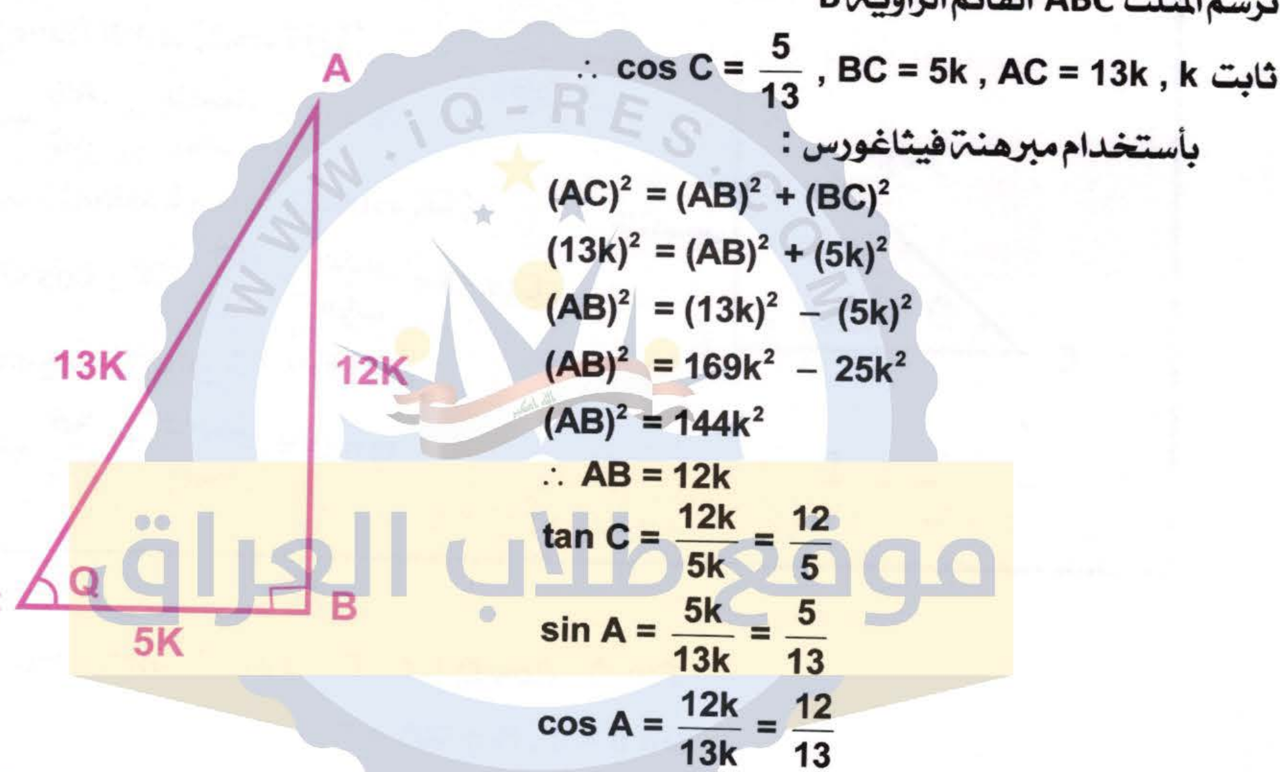
$$\boxed{\therefore \tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}}$$

مثال1/ اذا علمت ان $\cos C = \frac{5}{13}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في B

جد : $\tan C$, $\sin A$, $\cos a$

الحل /

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية B



$\therefore \cos C = \frac{5}{13}$, BC = 5k , AC = 13k , k ثابت

بأستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(13k)^2 = (AB)^2 + (5k)^2$

$(AB)^2 = (13k)^2 - (5k)^2$

$(AB)^2 = 169k^2 - 25k^2$

$(AB)^2 = 144k^2$

$\therefore AB = 12k$

$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

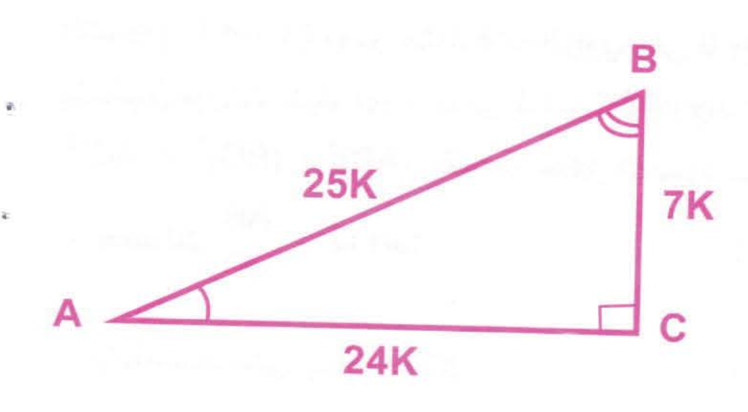
$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$

$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$

مثال2/ اذا علمت ان $\tan A = \frac{7}{24}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في C . جد cos B , sin A ؟

الحل /

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في C



$\tan A = \frac{7}{24}$

BC = 7k , AC = 24k

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$(AB)^2 = (24k)^2 + (7k)^2$

AB = 25k

$\sin A = \frac{7K}{25K} = \frac{7}{25}$

$\cos B = \frac{7K}{25K} = \frac{7}{25}$

[5 – 4] النسبة المثلية لزاوية خاصة Trigonometric Ratio

(1) زاوية قياسها $45°$:

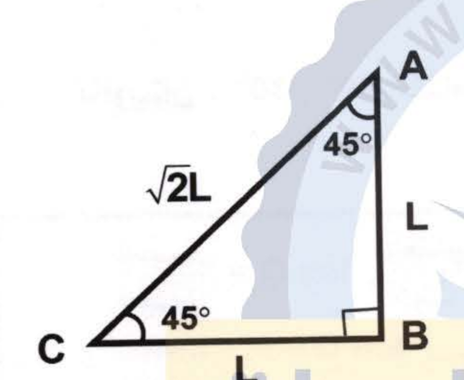
نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B . واحدى زواياه قياسها ($45°$) فتكون الاخرى ($45°$) ايضا

$\therefore AB = BC = L$

فيثاغورس : $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}L$



$\text{Sin } 45° = \dfrac{L}{\sqrt{2}L} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\text{Sin } 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$\text{Cos } 45° = \dfrac{L}{\sqrt{2}L} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\text{Cos } 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$\tan 45° = \dfrac{L}{L} = 1 \rightarrow \boxed{\tan 45° = 1}$

(2) زاوية قياسها $30°$, $60°$

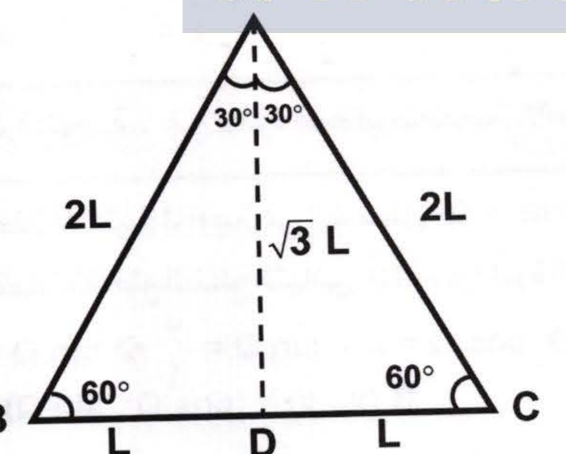
نرسم مثلثا متساوي الاضلاع طول ضلعه = 2L فيكون قياسات زواياه متساوية وكل منها = $60°$

نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ لاحظ الشكل المجاور

$\therefore CD = DB = L$ وحدة

وان $m\angle BAD = 30°$

باستخدام مبرهنة فيثاغور نجد ان $AD = \sqrt{3}L$



$\text{Sin } 30° = \dfrac{L}{2L} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Sin } 30° = \dfrac{1}{2}}$

$\text{Sin } 60° = \dfrac{\sqrt{3}L}{2L} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Sin } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\text{Cos } 30° = \dfrac{\sqrt{3}L}{2L} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Cos } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\text{Cos } 60° = \dfrac{L}{2L} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Cos } 60° = \dfrac{1}{2}}$

$\tan 30° = \dfrac{L}{\sqrt{3}L} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

$\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}L}{L} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\tan 60° = \sqrt{3}}$

لاحظ ان : $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$

وكذلك : $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

أي ان جيب احدهما يساوي جيب تمام الاخرى وبالعكس .

وبصورة عامة اذا كانت Q زاوية حداة فان قياس متممتها هو $(90° - Q)$ ويكون :

$$\sin(90° - Q) = \cos Q$$
$$\cos(90° - Q) = \sin Q$$

ملاحظة / الزاويتان : $30°$, $60°$ متتامتان لان $60° + 30° = 90°$

الخلاصة :

* $\sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$, $\cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$, $\tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
* $\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$, $\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$
* $\sin(90° - Q) = \cos Q$, $\cos(90° - Q) = \sin Q$
* $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[4 – 6] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية :

تعريف [4 – 5]

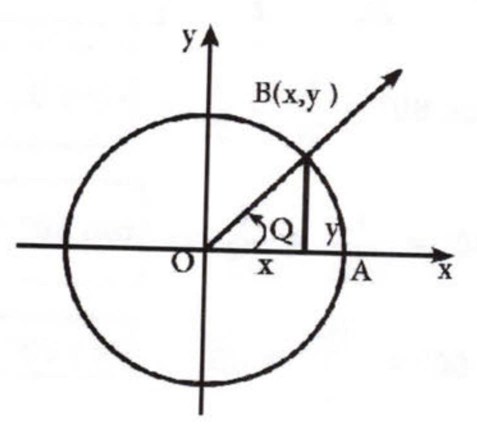
دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة .

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل $m \angle \overrightarrow{AOB} = Q$ زاوية موجهة في الوضع القياسي ,

B نقطة تقاطع الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ مع دائرة الوحدة نفرض ان $B(x,y)$

$\cos Q = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos Q = x$ ، $\sin Q = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin Q = y$

$\therefore B(x, y) = (\cos Q, \sin Q)$



ملاحظة /

باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس على المستوي يمكن ايجاد النسب المثلثية الاتية :

$$\sin(180° - Q) = \sin Q$$
$$\cos(180° - Q) = -\cos Q$$
$$\tan(180° - Q) = -\tan Q$$

تعريف [4 – 6]

> النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

لاحظ ان نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ مما سبق يتضح ان لكل زاوية موجهة Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x,y) يكون $x = \cos Q\ ,\ y = \sin Q$.

مثال7/ جد sin Q , cos Q , tan Q اذا علمت ان $Q = 0°\ ,\ 90°\ ,\ 180°$

الحل / نعلم ان 0° , 90° , 180° يقع الضلع النهائي لكل منها على احد المحورين الاحداثيين .
وكما في الشكل (6 – 4) فان :

$(\cos 0\ ,\ \sin 0) = (1\ ,\ 0) \Rightarrow \boxed{\cos 0° = 1}$

$\boxed{\sin 0° = 0}$

$\therefore \boxed{\tan 0°} = \dfrac{\sin° 0}{\cos° 0} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{\tan° 0 = 0}$

$(\cos 90°\ ,\ \sin 90°) = (1\ ,\ 0)$ *

$\Rightarrow \boxed{\cos 90° = 0}\ ,\ \boxed{\sin 90° = 1}$

لكن $\tan 90° = \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°}$ غير معرف

$(\cos 180°\ ,\ \sin 180°) = (-1\ ,\ 0)$ *

$\Rightarrow \boxed{\cos 180° = -1}\ ,\ \boxed{\sin 180° = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\tan 180° = 0}$

Y
(cos90°, sin90°)
B (0,1)
A (1,0)
X
O
c (-1,0)
(cos0 , sin0)
D (0,-1)

ملاحظة /

النسب المثلثية للزاوية $(180° + \theta)$ في الربع الثالث

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$

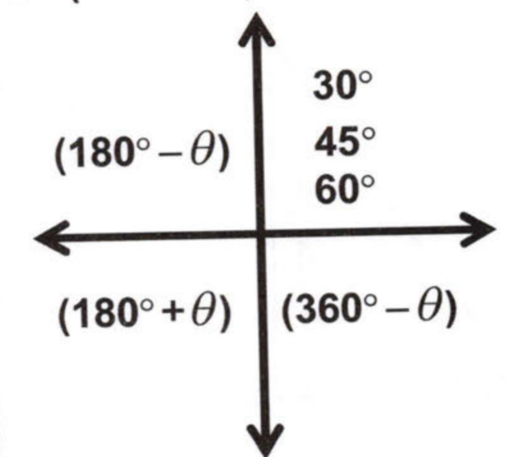
$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$

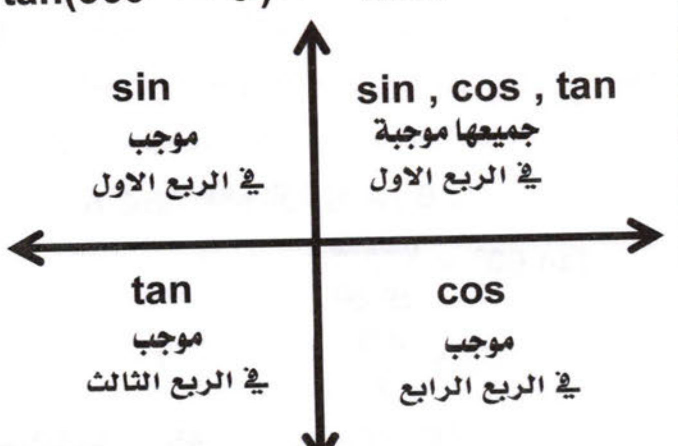
النسب المثلثية للزاوية $(360° - \theta)$ في الربع الرابع

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$

$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$



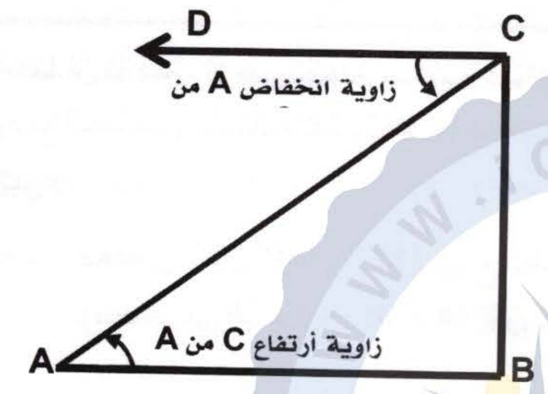


[7 - 4] التطبيقات الدائرية

زاوية الارتفاع

هي الزاوية المحصورة بين المستوي الافقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة اعلى من هذا المستوي

[1 - 7 - 4] زاويتا الارتفاع والانخفاض



نتمكن من حساب الارتفاعات والابعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها . فاذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C تقع فوق افق A فان الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C وبين افق A تدعى (زاوية ارتفاع Angle of Elevation C بالنسبة الى A)

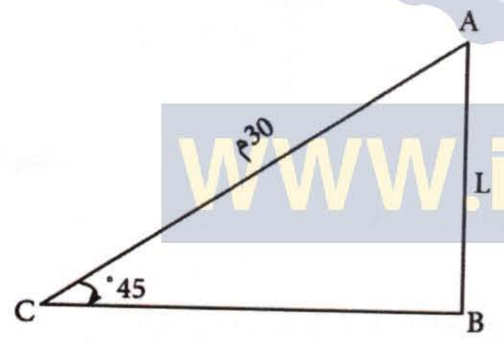
مثلا الزاوية $\angle CAB$ في الشكل (7 - 4)

زاوية الانخفاض

هي الزاوية المحصورة بين المستوي الافقي للنظر مع الشعاع المتجه الى نقطة تحت مستوى النظر

اما اذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت افق C , فان الزاوية الكائنة , بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى النقطة A وبين افق C تدعى (زاوية انخفاض Angle of Depression A بالنسبة الى C) مثلا الزاوية $\angle ACD$ في الشكل (7-4).

مثال8/ طائرة ورقية طول خيطها 30 m فاذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الارض (مع الافق) هي 45° . جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الارض ؟



الحل / نفرض ان الارتفاع = L من وحدات الطول

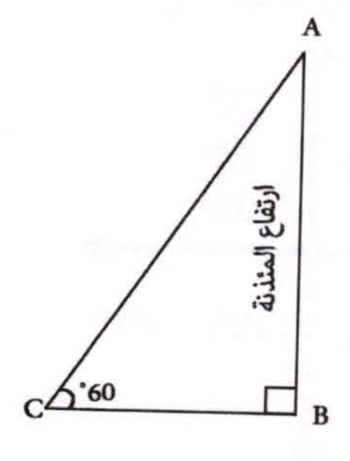
في المثلث ABC قائم الزاوية في B .

$$\therefore \sin 45° = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30}$$

$$L = \frac{30}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\overset{15}{\cancel{30}}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 15\sqrt{2}$$

$$L = 21.21 \text{ m}$$

مثال9/ وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة على الارض تبعد 8 m عن قاعدتها تساوي 60° فما ارتفاع المئذنة ؟



الحل /

ΔABC قائم الزاوية في B :

$$\tan 60° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{AB}{8}$$

$\therefore AB = 8\sqrt{3}$ متر ارتفاع المئذنة

مثال10/ جبل ارتفاعه 2350 m وجد راصد من قمته

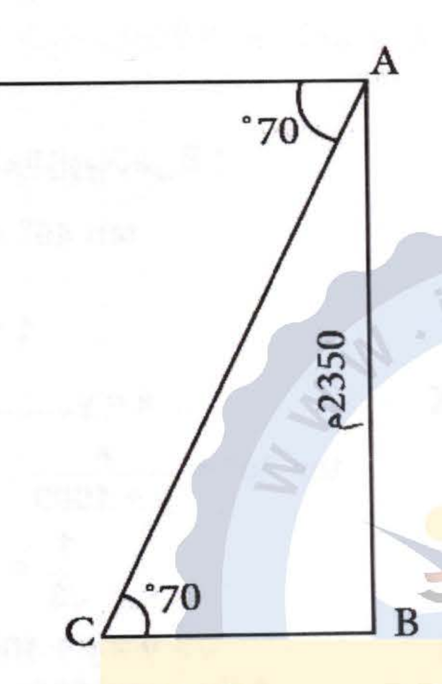


ان قياس زاوية انخفاض

نقطة على الارض $70°$

فما هي المسافة بين النقطة والراصد ؟

علما ان $\sin 70° = 0.9396$.



الحل /

قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

Δ ABC قائم الزاوية في B

$$\sin 70° = \frac{AB}{AC}$$

$$0.9396 = \frac{2350}{AC}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{2350}{0.9396} \cong 2500 \text{ m}$$

مثال11/ من سطح منزل ارتفاعه 7 متر وجد راصد ان زاوية ارتفاع اعلى عمارة امامه $60°$ وزاوية انخفاض قاعدتها $30°$. جد البعد بين الراصد والعمارة وارتفاع العمارة .

الحل/

$\angle DAC = \angle ACB$ [زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع]

في Δ ABC القائم في B :

$$\tan 30° = \frac{7}{Y}$$

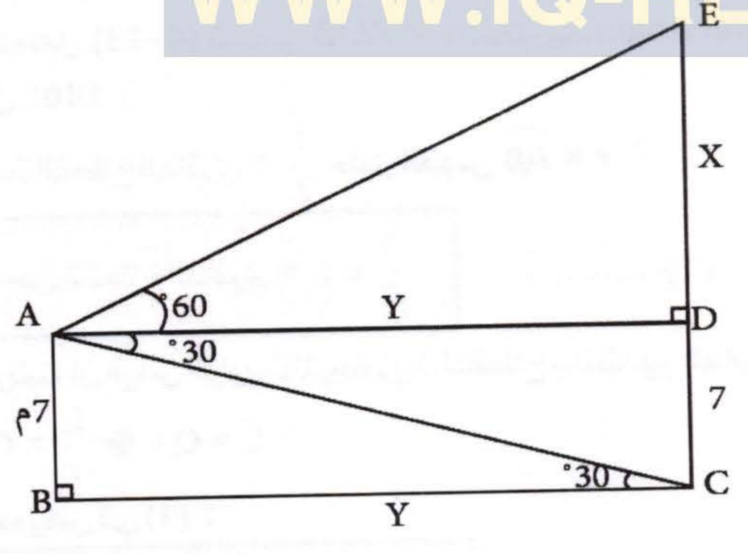
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{Y} \Rightarrow Y = 7\sqrt{3}$$

البعد بين الراصد والعمارة .

في Δ EAD القائم في D :

$$\tan 60° = \frac{X}{Y}$$

$$\sqrt{3} = \frac{X}{3\sqrt{7}} \Rightarrow X = 21 \text{ m}$$



ارتفاع العمارة = X + 7

ارتفاع العمارة = 21 + 7 = 28 م

مثال12/ شاهد راصد ان زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي $30°$ ولما سار الراصد في مستوي افقي نحو المنطاد مسافة **1000** متر شاهد ان زاوية الارتفاع هي $45°$. جد ارتفاع المنطاد الى اقرب متر .

الحل /

Δ ABC قائم الزاوية في B :

$$\tan 45° = \frac{x}{y}$$

$$1 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore\ x = y \text{..............(1)}$$

$$\tan 30° = \frac{x}{y + 1000} \text{ ....(2)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{y + 1000}$$

$$\sqrt{3}\, y = y + 1000$$

$$1.7y - y = 1000$$

$$y = \frac{1000}{0.7} = 1428.6$$

متر $x = 1429$ ← ارتفاع المنطاد .

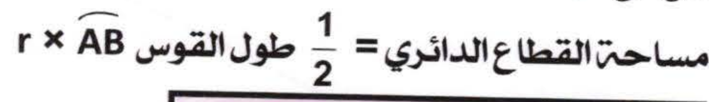


[4 – 7 – 2] القطاع الدائري Ciecular Sector

> القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس.

في الشكل (4–13) تسمى $\angle$ AOB المركزية Central Angle بزاوية القطاع الاصغر وقياسها اقل من $180°$.

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ طول القوس $\widehat{AB} \times r$



مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}\, L\, r$ .... (1)

واذا فرضنا ان قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الدائري = Q

فان $Q = \frac{L}{r}$ ← $L = Q\, r$

وبالتعويض في (1) :

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}\, Q\, r^2$ .... (2)

ملاحظة /
محيط القطاع الدائري = $r + r + L = 2r + L$
حيث L طول قوس القطاع الدائري
r طول نصف قطر دائرة القطاع

نتيجة [1]

اذا فرضنا سطح الدائرة قطاعا دائريا زاويته = 2π

∴ مساحة الدائرة $\frac{1}{2}(2\pi) \times r^2 = \pi r^2$

نتيجة [2]

$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}} = \frac{\frac{1}{2} Q r^2}{\pi r^2} = \frac{Q}{2\pi}$

∴ $\frac{Q}{2\pi} = \frac{D^\circ}{360^\circ}$ حيث D° قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الستيني

∴ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{D^\circ}{360^\circ}$

∴ مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{قياس الزاوية بالتقدير الستيني}}{360^\circ}$ X مساحة سطح دائرة القطاع

مثال13/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي 60° وطول نصف قطر دائرته 8cm

الحل /

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2} Q r^2$

مساحة القطاع = $\frac{1}{2} \times \frac{\pi\, 60}{180} \times 64$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3.14}{3} \times 64 = 33.49\ cm^2$

حل اخر

مساحة القطاع الدائري = $\frac{D^\circ}{360^\circ} \times$ مساحة دائرته $(r^2\pi)$

مساحة القطاع الدائري = $\frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 8^2$

مساحة القطاع = $64 \times 3.14 \times \frac{1}{6} = 33.49cm^2$

مثال14/ قطاع دائري مساحته $15\ cm^2$ وطول قوسه 6 cm

جد طول نصف قطر دائرته , محيطه , قياس زاويته بالستيني ؟

الحل /

(1) مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} L r$

$\frac{1}{2} \times 6 \times r = 15 \rightarrow r = 5$

(2) محيط القطاع الدائري = $2r + L$

محيط القطاع = $2 \times 5 + 6 = 16\ cm$

(3) $|Q| = \frac{L}{r}$

زاوية نصف قطرية $Q = \frac{6}{5} = 1.2$

$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow \frac{3.14}{180^\circ} = \frac{1.2}{D^\circ}$

$\therefore D^\circ = \frac{180^\circ \times 1.2}{3.14} = 68.6898^\circ$

[3 – 7 – 4] القطعة الدائرية Circular Segment

تعريف [8 – 4]

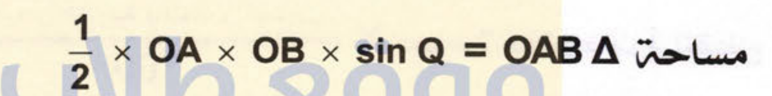
> القطعة الدائرية هي جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها ووتر مار بنهايتي ذلك القوس.
> تسمى $\angle AOB$ المركزية كما في الشكل (4-14)

زاوية القطعة الصغرى وقياسها اصغر من $180°$ لايجاد مساحة القطعة الدائرية :

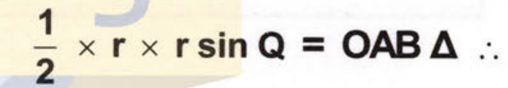
نفرض ان Q القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى .

$\therefore$ مساحة القطعة ACB = مساحة القطاع $(\overset{\frown}{OACB})$ – مساحة Δ OAB

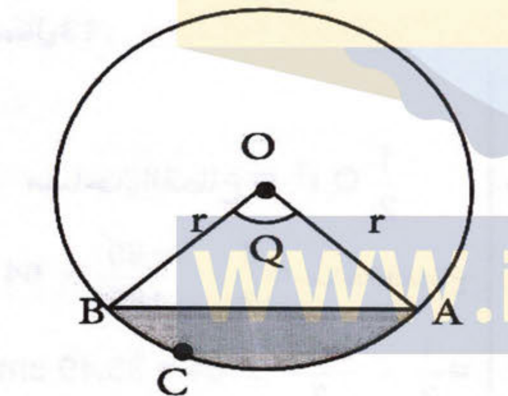
$\because$ مساحة (القطاع الدائري $(\overset{\frown}{OACB})$) = $\frac{1}{2} Q r^2$



مساحة Δ OAB = $\frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin Q$



$\therefore \Delta$ OAB = $\frac{1}{2} \times r \times r \sin Q$



$\therefore$ مساحة القطعة AC = $\frac{1}{2} Q r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin Q$

> مساحة القطعة ACB = $\frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

حيث Q قياس زاوية القطعة بالتقدير الدائري , r نصف قطر دائرتها .

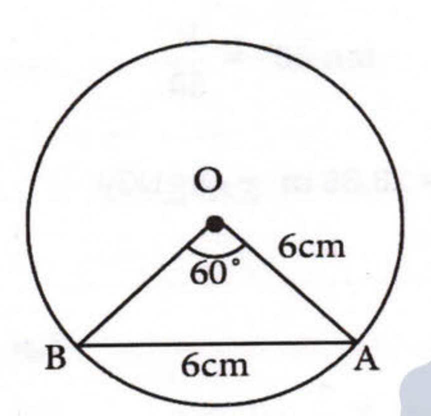
مثال15/ جد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها 12 cm وقياس زاويتها $30°$

الحل / $\frac{Q}{D°} = \frac{\pi}{180°} \rightarrow \frac{Q}{30°} = \frac{\pi}{180°} \rightarrow Q = 0.5236$

$\because$ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 30°)$

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \times 144 \times (0.5236 - 0.5) = 1.7 \text{ cm}^2$

مثال16/ O مركز دائرة نصف قطرها 6 cm , رسم فيها وتر طوله 6 cm , جد لاقرب cm^2 مساحة القطعة الدائرية الصغرى؟



الحل / AOB Δ متساوي الاضلاع ، $\therefore m\angle AOB = 60°$

$$\frac{Q}{D°} = \frac{\pi}{180°} \rightarrow \frac{Q}{60°} = \frac{\pi}{180°} \rightarrow Q = \frac{\pi}{3} = \frac{22}{21} = 1.047$$

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

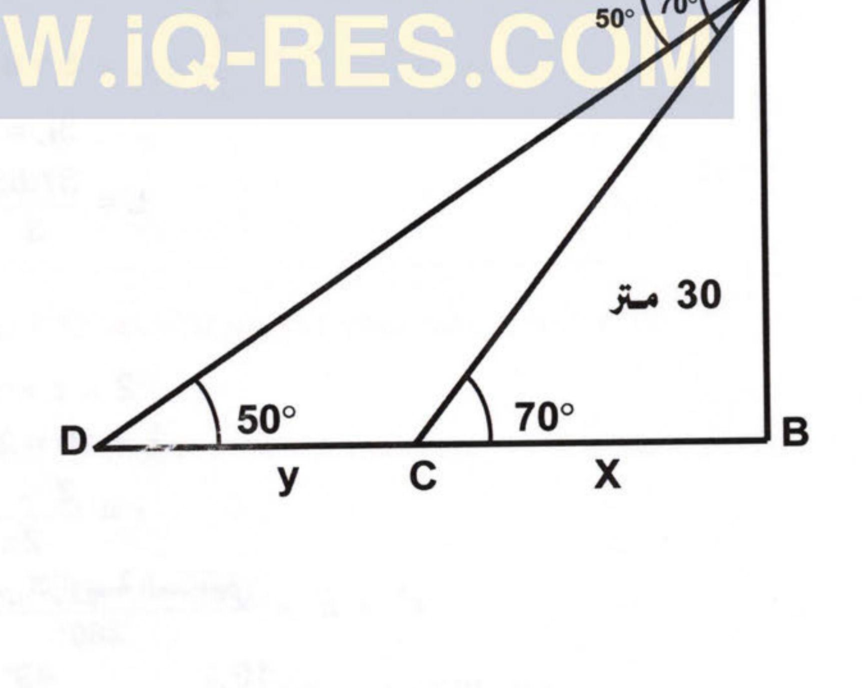
مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} \times 36 \times (1.047 - \sin 60°)$

مساحة القطعة الدائرية $= 18\,(1.047 - 0.865) = 18\,(0.182) = 3.276\ cm^2$

حلول تمارين (2 - 4)

س1/ وقف رجل في اعلى برج وابصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة , فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الاولى (70°) وزاوية انخفاض قاعدة الشجرة الثانية (50°) جد المسافة بين الشجرتين مع العلم ان ارتفاع البرج (30 m) . علما ان $\tan 50° = 1.2$, $\tan 70° = 2.8$

الحل /



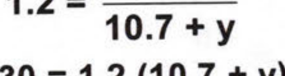
$$\tan 70° = \frac{30}{x}$$

$$2.8 = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{2.8} = 10.7\ m$$

$$\tan 50° = \frac{30}{x + y}$$

$$1.2 = \frac{30}{10.7 + y}$$



$$30 = 1.2\,(10.7 + y)$$

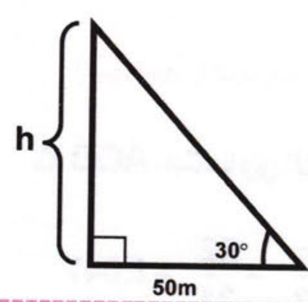
$$30 = 12.84 + 1.2\,y$$

$$1.2\,y = 30 - 12.84$$

$$1.2\,y = 17.16$$

$$y = \frac{17.16}{1.2} = 14.3\ m$$ البعد بين الشجرتين

س2/ من نقطة تبعد عن قاعدة برج (50 m) وجد ان زاوية ارتفاع قمتها (30°) فما ارتفاع البرج ؟



الحل / $\tan 30^\circ = \frac{h}{50}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{50} \rightarrow h = \frac{50}{\sqrt{3}} \rightarrow$ ارتفاع البرج $h = 28.86\ m$

س3/ جد مساحة قطاع دائري طول قوسه (8 cm) وطول نصف قطر دائرته (3.2 cm) ؟

الحل / مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} \times L \times r$

مساحة القطاع $= \frac{1}{2} \times 8 \times 3.2 = 12.8\ cm^2$

س4/ جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته 100° وطول نصف قطر دائرته (10 cm) ؟

الحل / مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{قياس الزاوية الستيني}}{360^\circ}$ × مساحة سطح دائرته

مس القطاع الدائري = $\frac{100^\circ}{360} \times (r^2 . \pi)$

مساحة القطاع = $10^2 \times 3.14 \times \frac{100^\circ}{360^\circ} = 87.3\ cm^2$

س5/ قطاع دائري مساحته ($37.68\ cm^2$) وطول نصف قطر دائرته (6 cm) جد طول قوسه ؟

الحل / مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} \times L \times r$

$\frac{1}{2} \times L \times 6 = 637.68$

$3L = 37.68$

طول القوس $L = \frac{37.68}{3} = 12.56\ cm$

س6/ نصف محيط دائرة هو (10 cm) جد مساحة قطاع فيها قياس زاويته (45°) ؟

الحل / محيط الدائرة $= 2 \times r \times \pi$

$2 \times 10 = 2 \times r \times \pi$

$r = \frac{\cancel{2} \times 10}{\cancel{2}\pi} = \frac{10}{\pi}$

مساحة القطاع = $r^2 \times \pi \times \frac{\text{قياس الزاوية الستيني}}{360^\circ}$

مساحة القطاع = $(\frac{10}{\pi})^2 \times \pi \times \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{100}{\pi^{\cancel{2}}} \times \pi \times \frac{45}{360}$

مساحة القطاع = $\frac{100 \times 45}{\pi \times 360} = 3.98\ cm^2$

س7/ جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها °60 وطول نصف قطر دائرتها (8 cm) ؟

الحل / مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2} \times r^2 (Q - \sin Q)$

$$\frac{\pi}{180} = \frac{Q}{D^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi \times 60^\circ}{180^\circ} \rightarrow Q = \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times (8)^2 \times (\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \times 64(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

مساحة القطعة الدائرية $= 32(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}) = \frac{32 \times 1.089}{6} = 5.81 \text{ cm}^2$

[8 – 4] استخدام الحاسبة في ايجاد قيم التطبيقات الدائرية

علمت في البند [2-4] ان للزاوية نظامين للقياس هما : القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ اعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له DEG اختصارا لكلمة (DEGREE) درجة .

اما القياس الدائري فيرمز له RAD اختصارا لكلمة (RADLAN) نصف قطري .

وهذان الرمزان يظهران في اعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح [DRG →] فالضغطة الاولى تظهر DEG والضغطة الثانية تظهر RAD وبالعكس .

وللنسب المثلثية مفاتيح ايضا وسنقتصر على نسبة الجيب , نسبة الجيب تمام ونسبة الظل .

فالمفتاح sin يرمز الى الجيب (sine) .

والمفتاح cos يرمز الى الجيب تمام (cosine) .

والمفتاح tan يرمز الى الظل (tangent) .

طريقة استخدام الحاسبة

(1) تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) او الدائري [(RAD)] بالضغط على (DRG) .

(2) تدخل الزاوية حسب النظام.

(3) تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة.

الامثلة الاتية توضح ذلك :

مثال17/ جد $\tan 350^\circ$ (3) $\cos 120^\circ$ (2) $\sin 30^\circ$ (1) ؟

الحل /

(1) ☼ النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG اعلى الشاشة.

☼ اكتب 30

☼ اضغط على (sin) فتحصل على الناتج = 0.5

ملاحظة /

$\sin(-Q) = -\sin Q$

$\cos(-Q) = \cos Q$

$\tan(-Q) = -\tan Q$

(2) ☼ النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG
☼ اكتب 120
☼ اضغط على (cos) فتحصل على الناتج = 0.5−
(3) ☼ النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG
☼ اكتب 350 ثم اضغط على (tan) فيكون الناتج ≃ 0.1763 -
فيكون $\tan(-350°) \simeq -0.1763$ ← $(\tan(-Q) = -\tan Q)$

مثال18/ جد ناتج (1) $\sin\frac{5\pi}{4}$, (2) $\cos(-3\pi)$, (3) $\tan\frac{7\pi}{5}$

الحل / ☼ النظام دائري : نضغط لتظهر RAD
☼ نضغط على المفتاح الموجود عادة على اللوحة **2ndf** او INV ويكون بلون مغاير للاسود (اصفر او احمر مثلا ...)
☼ نضغط على مفتاح : π ← العمليات الحسابية ← النسبة = ناتج

(1) $\sin\frac{5\pi}{4}$
☼ اضغط لتظهر RAD
☼ نضغط 2ndf ثم π ⇐ 3.141592654 اضرب × 5 = 15.70796327
÷ 4 = 3.926990817 ثم sin = 0.707106781 −

(2) $\cos(-3\pi)$
من المعلوم ان $\cos(-Q)=\cos Q$ (نحذف الاشارة السالبة) .
☼ اضغط لتظهر RAD
☼ نضغط 2ndf ثم π = 3.141592654 ⇐ اضرب × 3 = 9.424777961
ثم cos = -1

(3) $\tan\frac{7\pi}{5}$
☼ اضغط لتظهر RAD
☼ نضغط 2ndf ثم π = 3.141592654 ⇐ اضرب × 7 = 21.9114858
⇐ ÷5 = 4.398229715 ثم اضغط tan = 3.07763537

تمرين/ جد مايأتي باستخدام الحاسبة :

(1) $\sin\frac{\pi}{6}$ (2) $\cos(-400°)$ (3) $\tan(-15°)$ (4) $\tan(-36°)$ (5) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (6) $\tan\frac{8\pi}{5}$

الحل /

(1) 0.5 (2) 0.766044443 (3) − 0.267949192

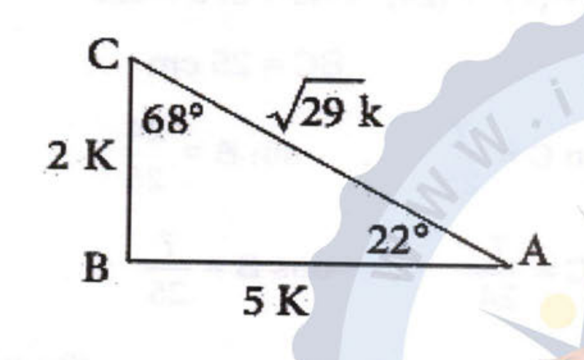
(4) − 0.588 (5) − 0.5 (5) − 3.077683537

[9 – 4] حل المثلث القائم الزاوية Solution of Right Angle Triaingle

يشتمل كل مثلث على ستة عناصر (ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا) ويقصد بحل المثلث ايجاد قيم عناصره المجهولة .

مثال19/ اذا كان $\tan 22° = 0.4$ اوجد : (1) $\sin 22°$, $\cos 22°$ (2) $\sin 68°$, $\cos 68°$

الحل /



$\tan 22° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

∴ المقابل $= 2k$

∴ المجاور $= 5k$

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ .... مبرهنة فيثاغورس

$4k^2 + 25k^2 = (AC)^2$

$AC = \sqrt{29}\ k$

(1) $\sin 22° = \frac{BC}{AC} = \frac{2k}{\sqrt{29}k} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

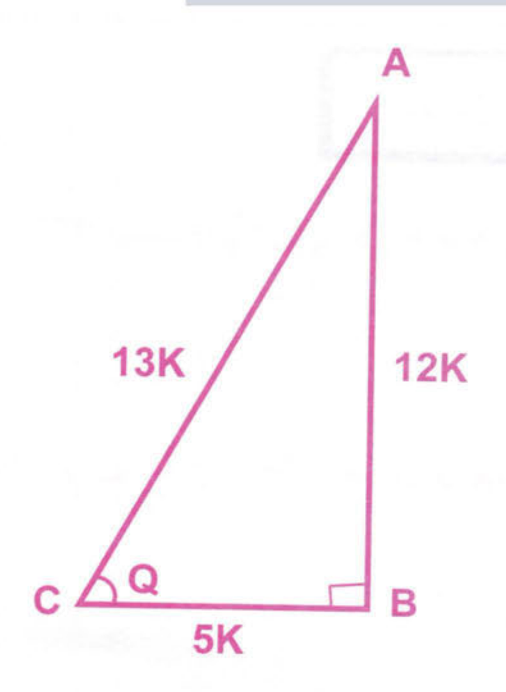
$\cos 22° = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{29}k} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

(2) $\sin 68° = \sin(90° - 22°) = \cos 22° = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\cos 68° = \cos(90° - 22°) = \sin 22° = \frac{2}{\sqrt{29}}$

مثال20/ اذا علمت ان $\cos C = \frac{5}{13}$ في Δ ABC القائم الزاوية في B جد $\cos A$, $\cos C$, $\sin A$

الحل / نرسم ABC القائم في B :



$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5k}{13k}$

∵ $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (فيثاغورس)

∴ $169\ K^2 = (AB)^2 + 25\ K^2$

∴ $(AB)^2 = 169\ K^2 - 25K^2$

∴ $(AB)^2 = 144\ K^2 \rightarrow AB = 12\ K$

$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

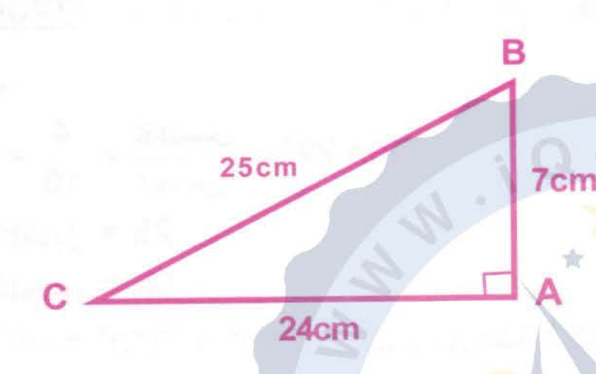
$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$

$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$

مثال21/ ABC مثلث قائم الزاوية في A فيه AB=7 cm , AC=24 cm جد :

sin C , sin B , tan C , cosB

الحل / $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$



$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$

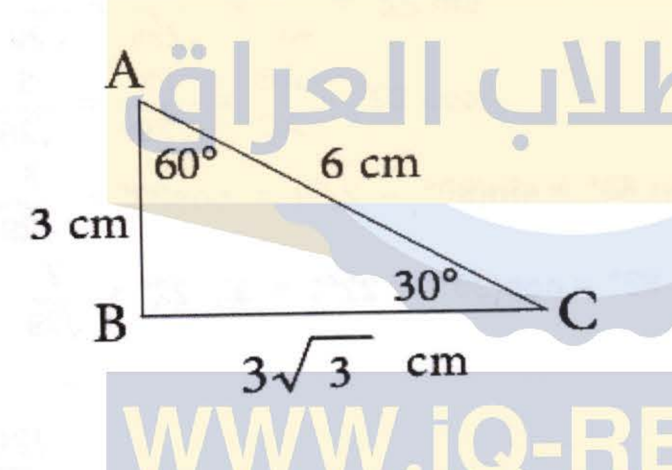
$\therefore BC = 25 \text{ cm}$

$\therefore \sin C = \frac{7}{25} \quad , \quad \sin B = \frac{24}{25}$

$\tan C = \frac{7}{24} \quad , \quad \cos B = \frac{7}{25}$

مثال22/ حل المثلث ABC القائم الزاوية في B . اذا علمت ان AB=3 cm AC=6 cm

الحل /



$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$36 = 9 + (BC)^2$

$BC = 3\sqrt{3}$

استكملنا ايجاد اطوال الاضلاع ,
والان سنجد زوايا المثلث الباقية

$\tan C = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 30°$

$m\angle A = 90° - 30° = 60°$

حلول تمارين (3 – 4)

س1/ ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $\sin C = \frac{8}{17}$ جد sin A , tan C , cos C

الحل /

$\sin C = \frac{8}{17} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

نفرض ان المقابل = 8k , نفرض ان الوتر = 17k

حسب نظرية فيثاغورس

$(BC)^2 = (AC)^2 - (AB)^2$

$(BC)^2 = (17k)^2 - (8k)^2$

$(BC)^2 = 289k^2 - 64k^2$

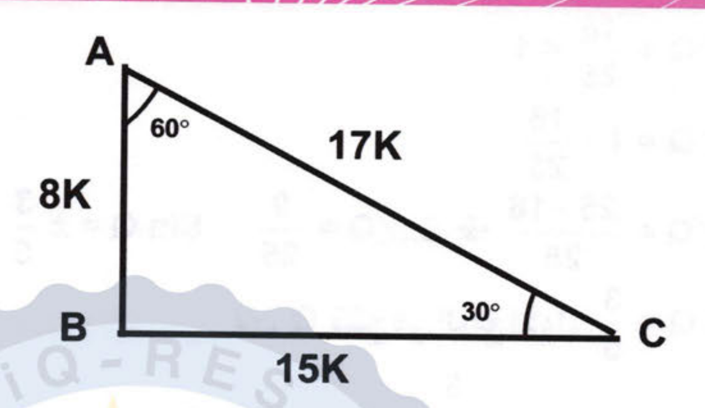
$(BC)^2 = 225k^2$

$BC = 15K$

$\cos C = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$

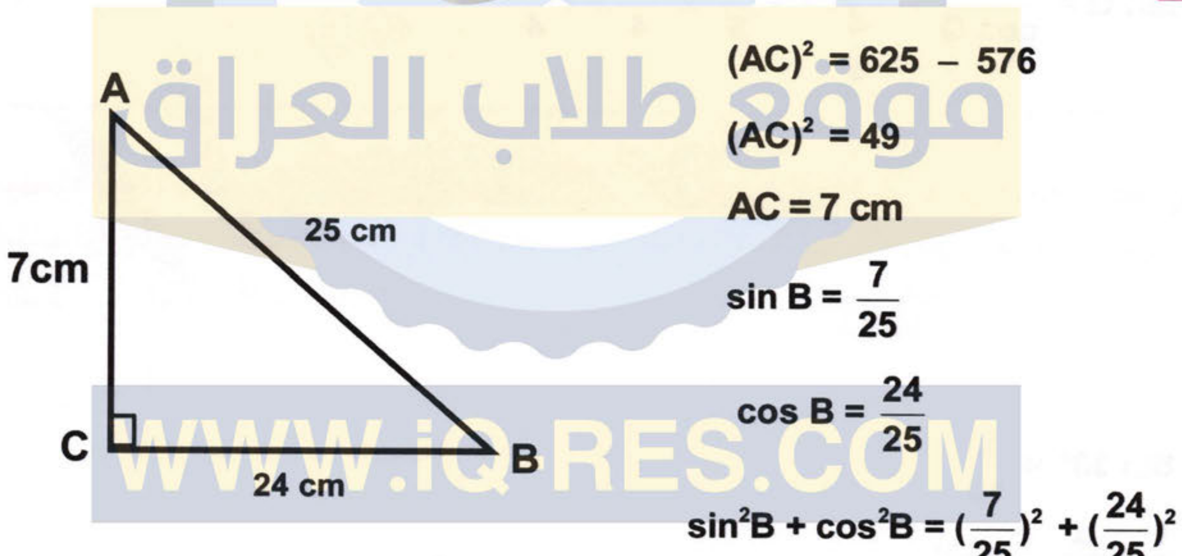
$\tan C = \frac{8K}{15K} = \frac{8}{15}$

$\sin A = \frac{15K}{17K} = \frac{15}{17}$



س2/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه AB=25 cm , BC=24 cm
جد قيمة $\sin^2 B + \cos^2 B$ وبأستخدام المعلومات المعطاة ؟

الحل / $(AC)^2 = (AB)^2 - (BC)^2$



$(AC)^2 = 625 - 576$

$(AC)^2 = 49$

$AC = 7$ cm

$\sin B = \frac{7}{25}$

$\cos B = \frac{24}{25}$

$\sin^2 B + \cos^2 B = (\frac{7}{25})^2 + (\frac{24}{25})^2$

$= \frac{49}{625} + \frac{576}{625} = \frac{625}{625} = 1$

$\therefore \boxed{\sin^2 B + \cos^2 B = 1}$

س3/ اذا كان $\cos Q = \frac{4}{5}$ فأوجد $\sin Q , \tan Q$

الحل /

$\because \cos Q > 0 \rightarrow$ Q تقع في الربع الاول او الربع الرابع $\therefore$

$\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$

$\sin^2 Q + (\frac{4}{5})^2 = 1$

$\sin^2 Q + \frac{16}{25} = 1$

$\sin^2 Q = 1 - \frac{16}{25}$

$\sin^2 Q = \frac{25 - 16}{25} \rightarrow \sin^2 Q = \frac{9}{25} \qquad \sin Q = \pm \frac{3}{5}$

$\sin Q = \frac{3}{5}$ لان Q تقع في الربع الاول

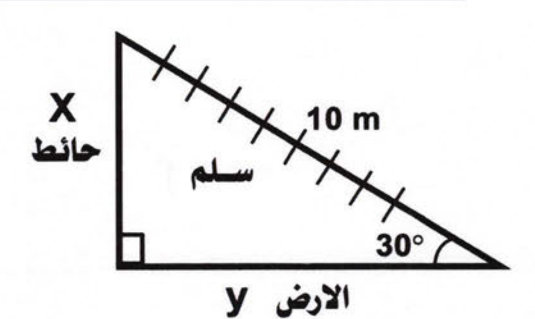
$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4} = \frac{3}{4}$

$\sin Q = \frac{-3}{5}$ لان Q تقع في الربع الرابع

$\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4} = -\frac{3}{4}$

س4/ سلم طوله (10 cm) مرتكز طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاخر على حائط شاقولي فأذا كانت الزاوية بين السلم والارض (30°) فما بعد طرفه الاعلى عن الارض وطرفه الاسفل عن الحائط . Ans($\sqrt{3} = 1.73$)

الحل /



$\sin 30° = \frac{x}{10}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{10}$

$2x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{2}$

$x = 5$ m بعد الطرف الاعلى عن الارض

$\cos 30° = \frac{y}{10}$

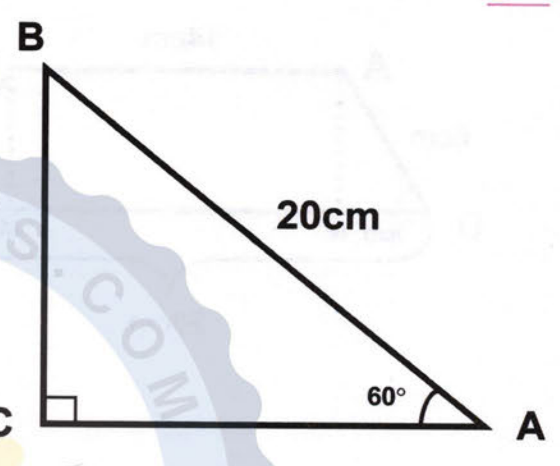
$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10}$

$2y = 10\sqrt{3} \rightarrow y = \frac{\cancel{10}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \rightarrow y = 5\sqrt{3}$ m

$y = 5 \times 1.73 \rightarrow y = 8.63$ m بعد الطرف الاسفل عن الحائط

س5/ ABC مثلث قائم الزاوية في C فيه $(M \angle CAB = 60°)$ $\overline{AB} = 20$ cm جد مساحة منطقته ؟

الحل /



$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos 60° = \frac{AC}{20} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \rightarrow AC = 10 \text{ cm}$$

$$\sin 60° = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{20} \rightarrow BC = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times AC \times BC$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{3}$

مساحة المثلث $= 50\sqrt{3}$ cm^2

س6/ جد قيمة :

(A)

$$\frac{3}{4} \tan^2 30° + 2 \sin 60° + 3 \tan 45° + \cos^2 30° - \tan 60°$$

$$= \frac{3}{4} \times (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (3 \times 1) + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{3}{1} + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{1} = 1 + 3 = 4$$

(B)

$$\cos^2 45° \sin 60° \tan 60° \cos^2 30°$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

(C)

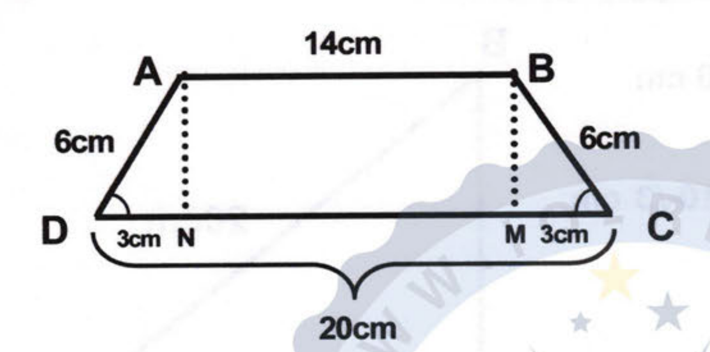
$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

س7/ شبه منحرف ABCD فيه : AD = BC (متساوي الساقين) , AB=14 cm , AD=6 cm
DC=20cm جد $m \angle CDA$ ؟

الحل /



نرسم من B مستقيم ⊥ DC في نقطة M

نرسم من A مستقيم ⊥ DC في نقطة N

في المثلثان AND , BCM   DN = MC = 3 cm

في المثلث ADN القائم الزاوية في N

$\cos \angle D = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\cos D = \frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ m \angle CDA = 60°$

اسئلة حلول الفصل الرابع

س1/ جد محيط المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها $5\sqrt{3}$ cm

س2/ رجل طوله 1.8m وقف امام مصباح وعلى بعد 22m منه وجد ان طول ظله على الارض 18m فما ارتفاع المصباح عن سطح الارض ؟

س3/ سلم اسند على جدار فصنع مع الارض زاوية قياسها 30° ووصل الى نقطة ترتفع 3m عن سطح الارض . ثم ادير السلم واسند على جدار اخر في الجهة الثانية فصنع مع الارض زاوية 45° فما عرض الشارع ؟

س4/ وجد رجل على ظهر زورق زاوية ارتفاع قمة عمود فوق سطح منزل يساوي 30° وبعد ان تحرك الزورق مسافة 60m في اتجاه العمود تماما وجد ان زاويتي ارتفاع قمة العمود وقاعدته 60° و 30° على التوالي . احسب ارتفاع العمود والمنزل.

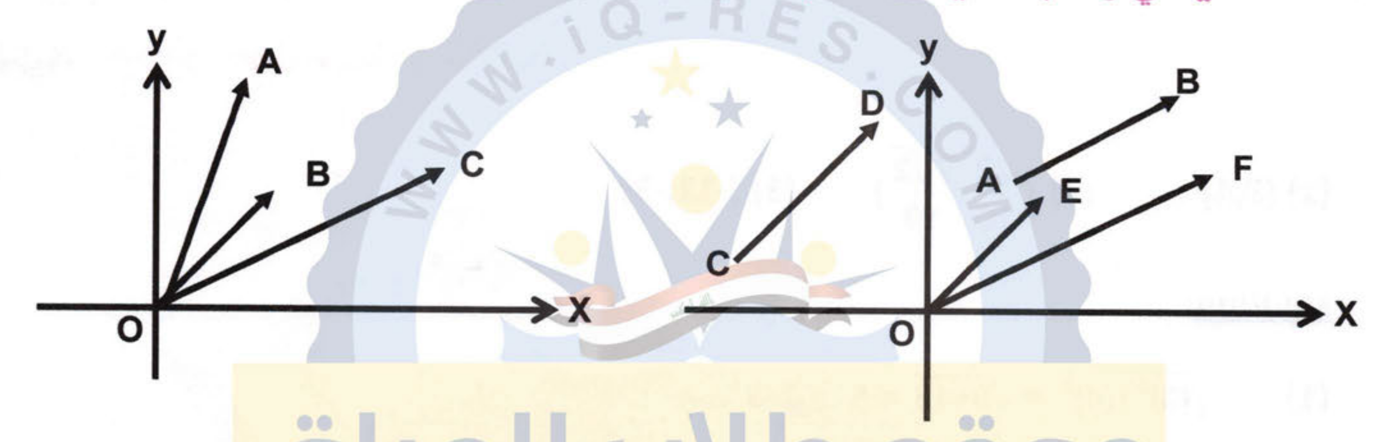
س5/ سارية علم مثبتة فوق عمارة طولها $\frac{1}{9}$ ارتفاع العمارة وجد ان رجل من نقطة على الارض ان زاوية ارتفاع قاعدة السارية 37° وبعد ان تقدم نحو العمارة مسافة 30m وجد ان زاوية ارتفاع قمة السارية 53° فما ارتفاع العمارة .

ملاحظة / $\tan 37° = \frac{3}{4}$, $\tan 53° = \frac{4}{3}$

الفصل الخامس

المتجهـــــات

المتجه : وهو عبارة عن قطعة مستقيم موجهه ويسمى المتجه الذي يبتدئ بنقطة الاصل بالمتجه القياسي او المتجه المقيد . اما المتجه الغير مرتبط بنقطة الاصل فيسمى بالمتجه الحر (الطليق)



المتجهان المتوازيان : وهما متجهان متوازيان وقد يكونان في نفس الاتجاه او يكونان باتجاهين متعاكسين

المتجهان المتكافئان : وهما المتجهان اللذان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه .



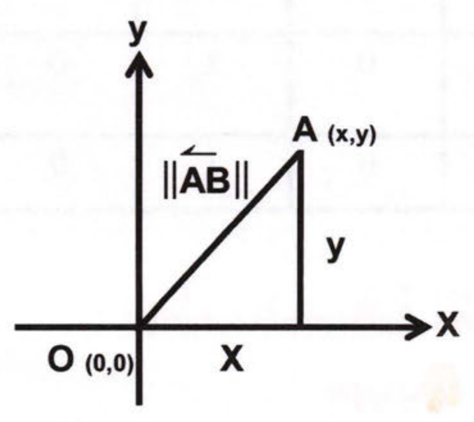
طول المتجه : وهي المسافة بين نقطة بداية المتجه (نقطة الاصل) ونقطة انتهاء المتجه .

فمثلا طول المتجه $\overleftarrow{AB}$ يرمز له $\|\overleftarrow{AB}\|$

المتجه الصفري : يسمى المتجه (0,0) بالمتجه الصفري لان نقطة بدايته ونقطة نهايته

هي نقطة الاصل ويرمز له $\overleftarrow{0}$ وطوله = $\|\overleftarrow{0}\|$ = صفر .

المتجهان المتساويان : يقال للمتجهين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ انهما متساويان اذا وفقط اذا كان $x_1=x_2\ ,y_1=y_2$



اتجاه المتجهه : هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

طول المتجه واتجاهه :

طول المتجه : هي المسافة بين نقطة بداية المتجه ونقطة انتهائه

فطول $\overleftarrow{AB}$ يساوي طول AB ويرمز له $\|\overleftarrow{AB}\|$

تعريف [1 - 5]

اذا كان $\overleftarrow{A}$ متجها حيث $\overleftarrow{A} = (x,y)$

$$\| \overleftarrow{OA} \| = \| \overleftarrow{A} \| = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال1/ جد طول كل من المتجهات الاتية :

(1) (3,4) (2) $(\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10})$ (3) (-12,-9)

solution:

(1) $\sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ وحدة طول

(2) $\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{10})^2+(\frac{7\sqrt{2}}{10})^2} = \sqrt{\frac{2}{100}+\frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$ وحدة طول

(3) $\sqrt{(-12)^2+(-9)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ وحدة طول

في الامثلة السابقة استخدمنا قانون الطول لايجاد طول المتجه

طول $\overleftarrow{A}(x,y) = \|\overleftarrow{A}\| = \sqrt{(x)^2+(y)^2}$

Qالزاوية	sin Q	cos Q	tan Q
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	غير معرف

Qالزاوية	sin Q	cos Q	tan Q
180°	0	-1	0
270°	-1	0	غير معرف
360°	0	1	0
0°	0	1	0

اتجاه المتجه /

اذا كان $\bar{A} = (x,y)$ متجها فان اتجاه $\bar{A}$ يعرف بقياس الزاوية Q حيث $0 \le Q < 2\pi$, وتكون مقاسه باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة من محور السينات الموجب الى المتجه $\bar{A}$ حيث نلاحظ ان المتجه الصفري لايمكن تعريف اتجاهه .

تعريف اتجاه المتجه /

هي الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

قانوني اتجاه المتجه

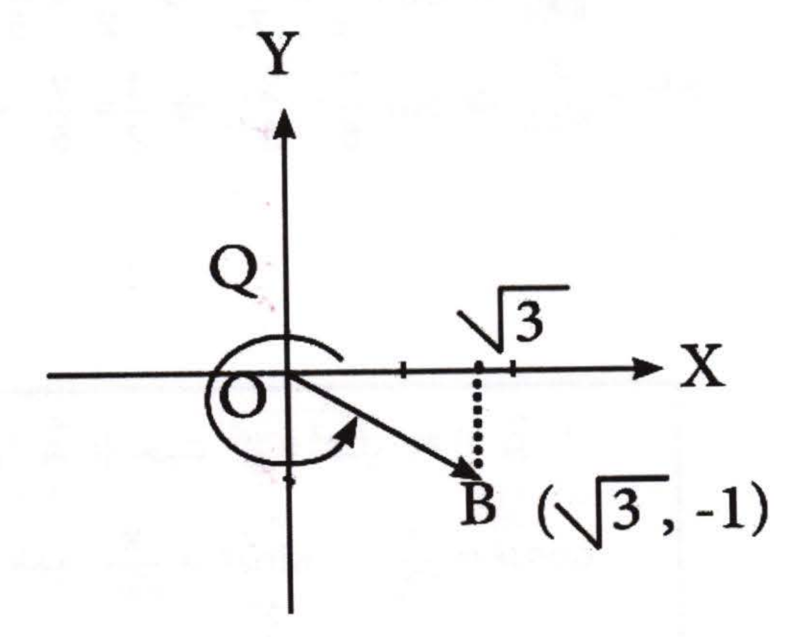
$$\text{Cos } Q = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|\bar{A}\|}$$

$$\text{Sin } Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\|\bar{A}\|}$$

مثال2/ جد طول واتجاه المتجه $\overline{OB} = (\sqrt{3},-1)$

الحل / $\|\overline{OB}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ وحدة طول

نفرض ان Q يساوي الزاوية التي يحددها المتجه $\overline{OB}$



$$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\overline{OB}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

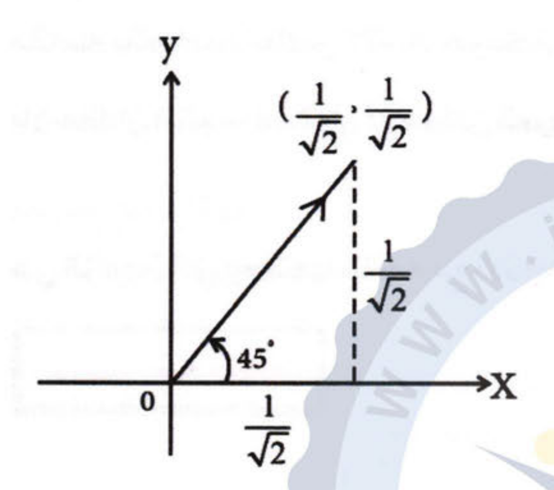
$$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\overline{OB}\|} = \frac{-1}{2}$$

من الرسم نلاحظ ان
Q تقع في الربع الرابع

اتجاه المتجه هو ← $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

مثال3/ جد اتجاه المتجه $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

الحل / نفرض ان Q تساوي قياس زاوية المتجه $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$



$$\text{Cos } Q = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\|\overleftarrow{A}\|}$$

$$\text{Cos } Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sin } Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\|\overleftarrow{A}\|}$$

$$\text{Sin } Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

∴ تقع في الربع الاول وتكون $\frac{\pi}{4}$

مثال4/ جد المتجه الذي طوله = 5 وحدات واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

الحل / نفرض ان متجه $A(x, y)$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|\overleftarrow{A}\|} \rightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5} \rightarrow 2X = 5\sqrt{3} \rightarrow X = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\|\overleftarrow{A}\|} \rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{y}{5} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5} \rightarrow 2y = 5 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

∴ المتجه هو $(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2})$

الخلاصة :

① ان طول $\overleftarrow{A} = (x,y)$ يساوي $\|\overleftarrow{A}\|$ حيث $\|\overleftarrow{A}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

② لايجاد اتجاه $\overleftarrow{A} = (x,y)$ نستخدم $\sin\theta = \frac{x}{\|\overleftarrow{A}\|}$ ، $\cos\theta = \frac{x}{\|\overleftarrow{A}\|}$

حلول تمارين (1 – 5)

س1/ جد طول واتجاه كل من المتجهات الاتية ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهه التي تمثل كلا منها .

(a) (-2,2)

طول المتجه $= \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+(2)^2}$

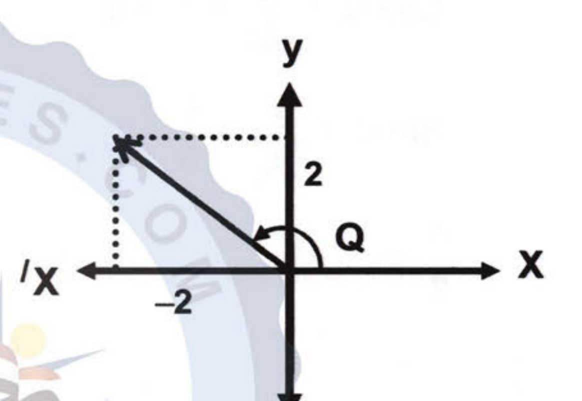
$= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ وحدة طول

$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Q تقع في الربع الثاني

$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$



(b) (-3,0)

طول المتجه $= \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+(0)^2}$

$= \sqrt{9+0} = 3$ وحدة طول

$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3} = -1$

$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{3} = 0$

$\therefore$ Q تقع في الربع الثاني $= \pi$

(c) $(1,\sqrt{3})$

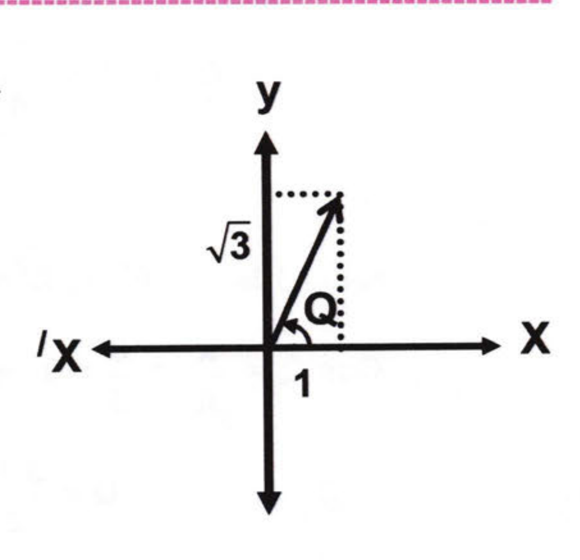
طول المتجه $\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ وحدة طول

$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{2}$ ------

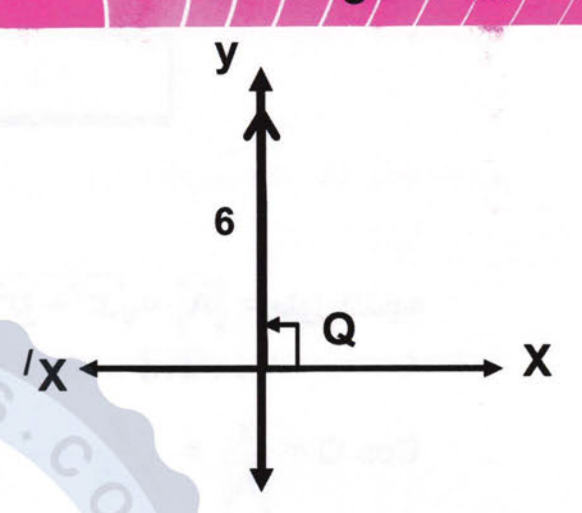
$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ------

$\therefore$ تقع في الربع الاول $= \frac{\pi}{3}$





(d) (0,6)



طول المتجه $\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(0)^2+(6)^2}$

$= \sqrt{0+36} = 6$ وحدة طول

$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{6} = 0$

$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{6}{6} = 1$

$\therefore$ Q تقع في الربع الاول $= \frac{\pi}{2}$

(e) $(\sqrt{3},-1)$

طول المتجه $\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ وحدة طول

$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-1}{2}$ $\quad Q = \frac{11\pi}{6}$ Q تقع في الربع الرابع $\therefore$

(f) (-3,-3)

طول المتجه $\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ وحدة طول

$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ Q تقع في الربع الثالث $\therefore$

(g) (0,-8)

طول المتجه $\rightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(0)^2+(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$ وحدة طول

$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{A}\|} = \frac{0}{8} = 0$ ➔ $\quad \sin Q = \frac{y}{\|\vec{A}\|} = \frac{-8}{8} = -1$

$Q = \frac{3\pi}{2}$ Q تقع في الربع الثالث $\therefore$

س2/ جد المتجه الذي طوله واتجاهه كالاتي :

ⓐ $\|\bar{B}\| = 2$, $Q=\frac{\pi}{6}$, $Q = \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30°$

$\text{Cos } 30° = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} \rightarrow 2x = 2\sqrt{3} \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \sqrt{3}$

$\text{Sin } 30° = \frac{y}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{2} \rightarrow 2y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{2} \rightarrow y = 1$

∴ المتجه هو ← $(\sqrt{3}, 1)$

ⓑ $\|\bar{B}\| = \sqrt{2}$, $Q = \frac{\pi}{4} = 45$

$\text{Cos } Q = \frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

$\text{Sin } Q = \frac{y}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

∴ المتجه هو ← $\bar{B} = (1,1)$

ⓒ $\|\bar{B}\| = 4$, $Q = \pi = 180$

$\text{Cos } Q = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{x}{4} \rightarrow x = -4$, $\text{Sin } Q = \frac{y}{4} \rightarrow 0 = \frac{y}{4} \rightarrow y = 0$

∴ المتجه هو $(-4,0)$

ⓓ $\|\bar{B}\| = 3$, $Q = \frac{3\pi}{2} = 270$

$\text{Cos } Q = \frac{x}{3} \rightarrow 0 = \frac{x}{3} \rightarrow x = 0$, $\text{Sin } Q = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{x}{3} \rightarrow x = -3$

∴ المتجه هو ← $(0,-3)$

ⓔ $\|\bar{B}\| = 4$, $Q = \frac{2\pi}{3} = 120°$

$\text{Sin } 120° = \text{Sin}(180° - 60°) = \text{Sin } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

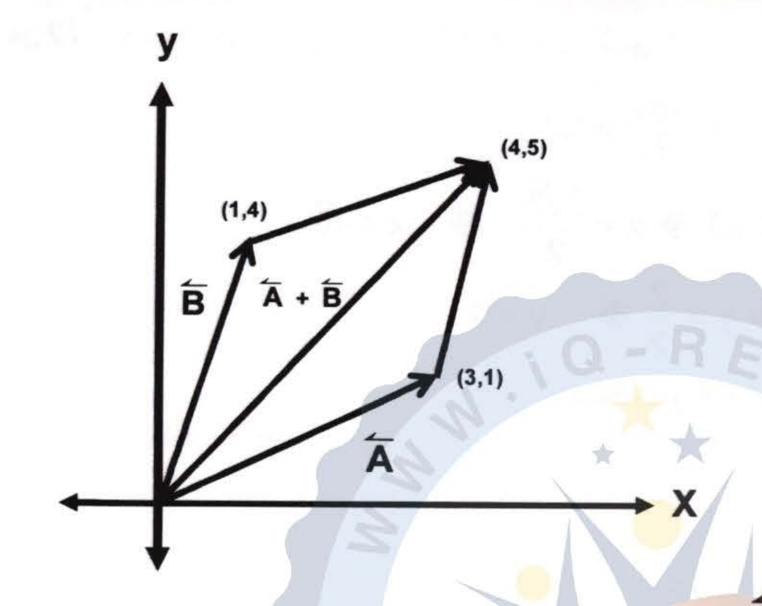
$\text{Cos } 120° = \text{Cos}(180° - 60°) = -\text{Cos } 60° = -\frac{1}{2}$

$\text{Cos } Q = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{x}{4} \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow \therefore x = -2$

$\text{Sin } Q = \frac{y}{4} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{4} \rightarrow 2y = 4\sqrt{3} = y = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \rightarrow y = 2\sqrt{3}$

∴ المتجه هو ← $(-2, 2\sqrt{3})$

جمع المتجهات



اذا كان $\overleftarrow{A} = (x_1 , y_1) , \overleftarrow{B} (x_2 , y_2)$

فان $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = (x_1 , y_1) + (x_2 , y_2)$

$\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

مثال5/ اذا كان $\overleftarrow{A} = (3 , 1)$

$\overleftarrow{B} = (1 , 4)$

فجد $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B}$

الحل / $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = (3 , 1) + (1 , 4) = (4 , 5)$

مثال6/ اذا كان $\overleftarrow{B} = (5 , -2)$ $\overleftarrow{A} = (-4 , 3)$ فجد $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B}$

الحل / $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = (-4 , 3) + (5 , -2) = (1 , 1)$

مثال7/ جد النظير الجمعي للمتجه (-2,3)

الحل / النظير الجمعي للمتجه (-2,3) هو (2,-3)

لان $(-2,3) + (2,-3) = (-2+2 , 3+(-3)) = (0,0)$

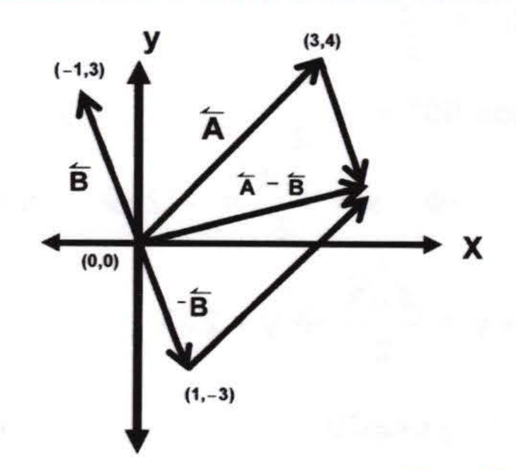
ضرب المتجهات

مثال8/ اذا كان $\overleftarrow{C} = (-1 , 3)$ فجد $-3\overleftarrow{C}$, $\frac{1}{2}\overleftarrow{C}$, $2\overleftarrow{C}$

الحل / $2\overleftarrow{C} = 2(-1 , 3) = (-2 , 6)$

$-3\overleftarrow{C} = -3(-1 , 3) = (3 , -9)$ ➔ $\frac{1}{2}\overleftarrow{C} = \frac{1}{2}(-1 , 3) = (\frac{-1}{2} , \frac{3}{2})$

طرح متجهين



مثال9/ اذا كان $\overleftarrow{A} = (3,4)$

$\overleftarrow{B} = (-1,3)$ فجد $\overleftarrow{A} - \overleftarrow{B}$

الحل / $\overleftarrow{A} - \overleftarrow{B} = \overleftarrow{A} + (-\overleftarrow{B})$

$= (3 , 4) + (1 , -3) = (4 , 1)$

مثال10/ اذا كان $L=-1$, $K=2$, $\overleftarrow{B} = (-2 , -1)$, $\overleftarrow{A} = (2 , 3)$



جد (1) $K\overleftarrow{A} - L\overleftarrow{B}$

(2) $\overleftarrow{A} - \overleftarrow{B}$

ووضح ذلك هندسيا

الحل /

$K\overleftarrow{A} = 2(2 , 3) = (4 , 6)$

$L\overleftarrow{B} = -1(-2 , -1) = (2 , 1)$

$(4 , 6) - (2 , 1) = (4 , 6) + (-2 , -1) = (2 , 5)$

$(2 , 3) - (-2 , -1) = (2 , 3) + (2 , 1) = (4 , 4)$

متجه الوحدة

اذا كان $\overleftarrow{C} = (x , y)$ فان : $\overleftarrow{C} = (x , 0) + (0 , y)$

$\overleftarrow{C} = x(1 , 0) + y(0 , 1)$

$\overleftarrow{C} = x\,\overleftarrow{U_1} + y\,\overleftarrow{U_2}$

متجه الوحدة

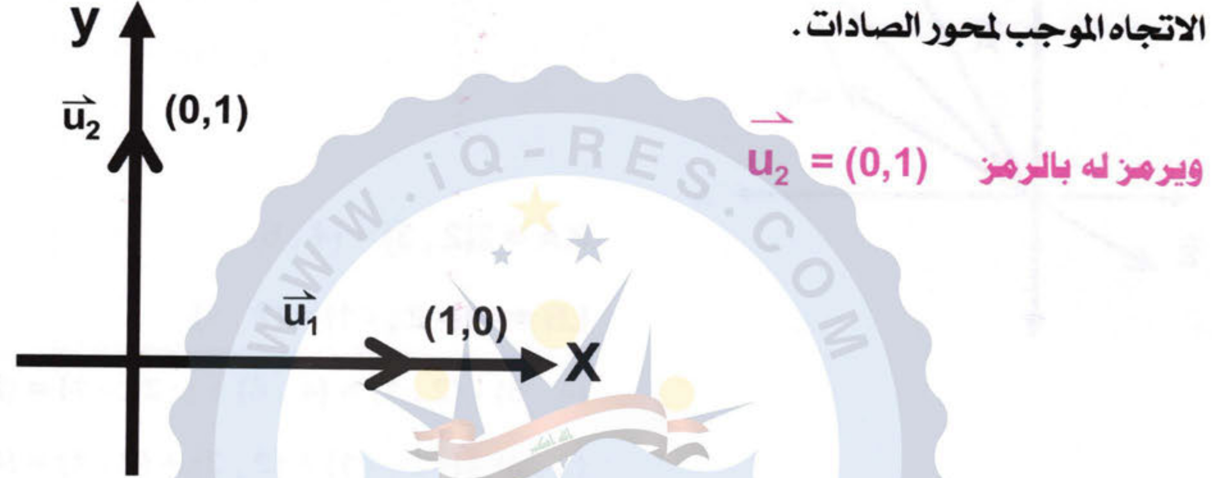
① **متجه الوحدة الاساسي** $\overrightarrow{u_1}$

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة طول واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات .

ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{u_1} = (1,0)$

② متجه الوحدة الاساسي $\overrightarrow{u_2}$

هو القطعة المستقيمة الموجهة التي بداتها نقطة الاصل وطولها وحدة طول واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات.



ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{u_2} = (0,1)$

مثال12/ اذا كان $\overline{A} = (4,7)$, $\overline{B} = (-5,3)$ جد $\overline{A} + \overline{B}$ وعبر عن النتائج بدلالة متجه الوحدة

الحل /

$\overline{A} + \overline{B} = (4 , 7) + (- 5 , 3) = (- 1 , 10)$

$(- 1 , 10) = - (1 , 0) + 10 (0 , 1) = - \overline{U_1} + 10 \overline{U_2}$

مثال13/ اذا كان $\overline{B} = 2\overline{U_1} + \overline{U_2}$, $\overline{A} = \overline{U_1} - 3\overline{U_2}$ جد $\overline{A} + \overline{B}$

الحل /

$\overline{A} + \overline{B} = (\overline{U_1} - 3\overline{U_2}) + (2\overline{U_1} + \overline{U_2}) = \overline{U_1}(1+2) + \overline{U_2}(-3 +1)$

$= 3\overline{U_1} - 2\overline{U_2} = (3 , - 2)$

مثال14/ اذا كان $\overline{A} = (5 , - 3)$ وكان $\overline{B} = (- 3 , 4)$ وكان $K=2$, $L=3$ جد $K\overline{A} - L\overline{B}$ ثم عبر عنه بدلالة متجه الوحدة.

الحل /

$K\overline{A} - L\overline{B} = 2(5 , - 3) - 3(- 3 , 4)$

$= (10 , - 6) + (9 , - 12)$

$= (19 , - 18)$

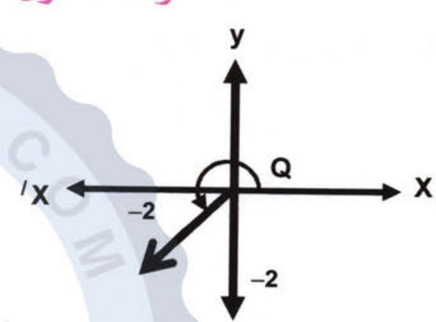
$= 19\overline{U_1} - 18\overline{U_2}$

حلول تمارين (2 - 5)

س1/ جد مقدار واتجاه كل من المتجهات الاتية موضحا بالرسم :

ⓐ $(-2\ ,\ -2)$ ⓑ $(3\ ,\ 0)$ ⓒ $\sqrt{3}\ \bar{U}_1 + \bar{U}_2$ ⓓ $-\bar{U}_1 - 2\bar{U}_2$

ⓐ طول المتجه $= \|\bar{A}\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ وحدة طول



$$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Cos } Q = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Sin } Q = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$Q = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$ ∴ Q تقع في الربع الثالث

ⓑ طول المتجه $= \|\bar{A}\| = \sqrt{(3)^2+(0)^2} = \sqrt{9} = 3$ وحدة طول

$$\text{Cos } Q = \frac{x}{3} \rightarrow \text{Cos } Q = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{Sin } Q = \frac{y}{3} \rightarrow \text{Sin } Q = \frac{0}{3} = 0$$

$$\therefore Q = 0\ ,\ 360°$$

ⓒ $\sqrt{3}\bar{U}_1 + \bar{U}_2 = (\sqrt{3}\ ,\ 1)$

طول المتجه $= \|\bar{A}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Cos } Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Sin } Q = \frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{\pi}{6} = 30°$$ Q تقع في الربع الاول

ⓓ $-\bar{U}_1 - 2\bar{U}_2 = (-1\ ,\ -2)$

طول المتجه $= \|\bar{A}\| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ وحدة طول

$$\text{Cos } Q = \frac{x}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Cos } Q = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Sin } Q = \frac{y}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Sin } Q = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

س2/ بسط مایاتي : $7(3\bar{U}_1 + 2\bar{U}_2)$, $-7(1\ ,\ 5)$, $4(1\ ,\ -1)$

الحل /

$4(1\ ,\ -1) = (4\ ,\ -4)$

$-7(1\ ,\ 5) = (-7\ ,\ -35)$

$7(3\bar{U}_1 + 2\bar{U}_2) = 7(3\ ,\ 2) = (21\ ,\ 14)$

س3/ عبر عن كل المتجهات التالية بدلالة متجهي الوحدة $\overleftarrow{U_1}$, $\overleftarrow{U_2}$

الحل /

ⓐ $(-1 , 4) = -\overleftarrow{U_1} + 4\overleftarrow{U_2}$

ⓑ $(5 , 3) = 5\overleftarrow{U_1} + 3\overleftarrow{U_2}$

ⓒ $(2 , 3) = 2\overleftarrow{U_1} + 3\overleftarrow{U_2}$

ⓓ $(-3 , -5) = -3\overleftarrow{U_1} - 5\overleftarrow{U_2}$

ⓔ $(0 , -1) = -\overleftarrow{U_2}$

ⓕ $(2 , 0) = 2\overleftarrow{U_1}$

س4/ اذا كان $\overleftarrow{E} = (x , y)$ حيث $x , y \in R$ وكان $\overleftarrow{A}$ أي متجه بحيث $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{E} = \overleftarrow{E} + \overleftarrow{A} = \overleftarrow{A}$
برهن على ان $\overleftarrow{E} = (0 , 0)$ ؟

الحل / نفرض ان $\overleftarrow{A} = (A , B)$, $\overleftarrow{E} = (x , y)$

$\overleftarrow{A} + \overleftarrow{E} = \overleftarrow{A}$

$(A , B) + (x , y) = (A , B)$

$(A + x , B + y) = (A , B)$

$A + x = A \rightarrow x = A - A \rightarrow x = 0$

$B + y = B \rightarrow y = B - B \rightarrow y = 0$

$\because \overleftarrow{E} = (x , y) \quad \therefore \overleftarrow{E} = (0 , 0)$

س5/ اذا كان $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B} + \overleftarrow{A} = (0 , 0)$ اثبت ان $\overleftarrow{A} = -\overleftarrow{B}$

الحل / نفرض ان $\overleftarrow{A} = (x_1 , y_1)$, $\overleftarrow{B} = (x_2 , y_2)$

$\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = (0 , 0)$

$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (0 , 0)$

$(x_1+x_2 , y_1+y_2) = (0 , 0)$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$

$y_1 + y_2 = 0$

$y_1 = -y_2$

$\overleftarrow{A} = (x_1 , y_1)$

$\overleftarrow{A} = (-x_2 , -y_2)$

$\overleftarrow{A} = -(x_2 , y_2) = -\overleftarrow{B} \quad \therefore \overleftarrow{A} = -\overleftarrow{B}$

س6/ اذا كان $\overleftarrow{A} = (\sqrt{3} , 1)$, $\overleftarrow{B} = (\sqrt{2} , \sqrt{3})$, $K=3$, $L=-2$ فجد كلا مماياتي :

ⓐ $K\overleftarrow{B} = 3(\sqrt{2} , \sqrt{3}) = (3\sqrt{2} , 3\sqrt{3})$

ⓑ $\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B} = (\sqrt{3} , 1) + (\sqrt{2} , \sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2} , 1+\sqrt{3})$

ⓒ $K\overleftarrow{A} - \overleftarrow{B} = 3(\sqrt{3} , 1) - (\sqrt{2} , \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} , 3) + (-\sqrt{2} , -\sqrt{3})$
$= (3\sqrt{3} - \sqrt{2} , 3 - \sqrt{3})$

ⓓ $K(\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B}) = 3\left[(\sqrt{3} , 1) + (\sqrt{2} , \sqrt{3})\right]$
$= 3(\sqrt{3} + \sqrt{2} , 1 + \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} , 3 + 3\sqrt{3})$

ⓔ * $KL(\overleftarrow{A} - \overleftarrow{B}) = 3 \times -2\left[(\sqrt{3} , 1) - (\sqrt{2} , \sqrt{3})\right] = -6\left[(\sqrt{3} , 1) + (-\sqrt{2} , -\sqrt{3})\right]$
$= -6(\sqrt{3} - \sqrt{2} , 1 - \sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} , -6 + 6\sqrt{3})$

س7/ حل السؤال 6 بالتعبير عن كل متجه بواسطة متجهي الوحدة $\bar{U}_1 , \bar{U}_2$
كان $K=3 , L=-2$, $\bar{B} = (\sqrt{2} , \sqrt{3})$, $\bar{A} = (\sqrt{3} , 1)$ فجد كلا مماياتي :

ⓐ $K\bar{B} = 3(\sqrt{2} , \sqrt{3}) = (3\sqrt{2} , 3\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\ \bar{U}_1 + 3\sqrt{3}\ \bar{U}_2$

ⓑ $\bar{A} + \bar{B} = (\sqrt{3} , 1) + (\sqrt{2} , \sqrt{3}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2} , 1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})\ \bar{U}_1 + (1 + \sqrt{3})\ \bar{U}_2$

ⓒ $K\bar{A} - \bar{B} = 3(\sqrt{3} , 1) - (\sqrt{2} , \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} , 3) + (-\sqrt{2} , -\sqrt{3})$
$= (3\sqrt{3} - \sqrt{2} , 3 - \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} - \sqrt{2})\ \bar{U}_1 + (3 - \sqrt{3})\ \bar{U}_2$

ⓓ $K(\bar{A} + \bar{B}) = 3\left[(\sqrt{3} , 1) + (\sqrt{2} , \sqrt{3})\right]$
$= 3(\sqrt{3} + \sqrt{2} , 1 + \sqrt{3}) = (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2})\ \bar{U}_1 + (3 + 3\sqrt{3})\ \bar{U}_2$

ⓔ $* \ KL(\bar{A} - \bar{B}) = 3 \times -2\left[(\sqrt{3} , 1) - (\sqrt{2} , \sqrt{3})\right] = -6\left[(\sqrt{3} , 1) + (-\sqrt{2} , -\sqrt{3})\right]$
$= -6(\sqrt{3} - \sqrt{2} , 1 - \sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2} , 6 + 6\sqrt{3}) = (-6\sqrt{3} + 6\sqrt{2})\ \bar{U}_1 + (6 + 6\sqrt{3})\ \bar{U}_2$

س8/ عبر عن المتجهات الاتية بواسطة متجهي الوحدة $\bar{U}_1 , \bar{U}_2$

(أ) متجه طوله (3 وحدات) واتجاهه $\frac{\pi}{3}$.

$\text{Cos}\ \frac{\pi}{3} = \frac{x}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Cos}\ 60° = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{3} \rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\text{Sin}\ \frac{\pi}{3} = \frac{y}{\|\bar{A}\|} \rightarrow \text{Sin}\ 60° = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ المتجه هو $(\frac{3}{2} , \frac{3\sqrt{3}}{2})$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $\frac{3}{2}\bar{U}_1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\bar{U}_2$

(ب) متجه طوله (10 وحدات) واتجاهه $\frac{\pi}{6}$

$\text{Cos}\ \frac{\pi}{6} = \frac{x}{10} \rightarrow \text{Cos}\ 30° = \frac{x}{10} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 5\sqrt{3}$

$\text{Sin}\ \frac{\pi}{6} = \frac{y}{10} \rightarrow \text{Sin}\ 30° = \frac{y}{10} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{10} \rightarrow y = 5$

المتجه $(5\sqrt{3} , 5)$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $5\sqrt{3}\bar{U}_1 + 5\ \bar{U}_2$

(جـ) متجه طوله (5 وحدات) واتجاهه $\frac{\pi}{4}$

$\text{Cos}\ \frac{\pi}{4} = \frac{x}{5} \rightarrow \text{Cos}\ 45° = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$\sin\ \frac{\pi}{4} = \frac{x}{5} \rightarrow \sin\ 45° = \frac{x}{5} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{5} \rightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}}$

المتجه $(\frac{5}{\sqrt{2}} , \frac{5}{\sqrt{2}})$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $\frac{5}{\sqrt{2}}\bar{U}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\ \bar{U}_2$

(د) متجه طوله ($\frac{3}{4}$ وحدات) واتجاهه π

$$\cos 180° = \frac{x}{\frac{3}{4}} \rightarrow -1 = \frac{x}{\frac{3}{4}} \rightarrow x = \frac{-3}{4}$$

$$\sin 180° = \frac{y}{\frac{3}{4}} \rightarrow 0 = \frac{y}{\frac{3}{4}} \rightarrow y = 0$$

المتجه $(0\ ,\ \frac{-3}{4})$ وبدلالة متجه الوحدة يصبح $\frac{-3}{4}U_1$

س9/ اذا كان $\overleftarrow{B} = (2\ ,-4)$, $\overleftarrow{A} = (5\ ,2)$ جد x بحيث $2\overleftarrow{A} + 3\overleftarrow{x} = 5B$

الحل /

$2\overleftarrow{A} + 3\overleftarrow{x} = 5B$

$3\overleftarrow{x} = 5\overleftarrow{B} - 2A$

$3\overleftarrow{x} = 5(2\ ,-4) - 2(5\ ,2)$

$3\overleftarrow{x} = (10\ ,-20) - (10\ ,4)$

$3\overleftarrow{x} = (10\ ,-20) + (-10\ ,-4)$

$3\overleftarrow{x} = (0\ ,-24)$

$\frac{1}{3}\left[3\overleftarrow{x} = (0\ ,-24)\right]$

$\overleftarrow{x} = (0\ ,\ \frac{1}{3} \times -24)$

$\overleftarrow{x} = (0\ ,-8)$

اسئلة حلول الفصل الخامس

س1/ اذا كان $\overrightarrow{A} = (-1,2)$ جد $\overrightarrow{B}$ اذا علمان

$$2\overrightarrow{A} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}) = 2\overrightarrow{B} - \frac{\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}}{3} + \frac{5\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}}{6}$$

س2/ اذا كان $\overrightarrow{A} = (2,-3)$, $\overrightarrow{B} = (-2,4)$ عبر عن المتجه $\overrightarrow{C} = (5,-7)$ بدلالة $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$

س3/ حل المعادلات التالية

① $(x\ ,2) + (-3\ ,y) = (0\ ,5)$

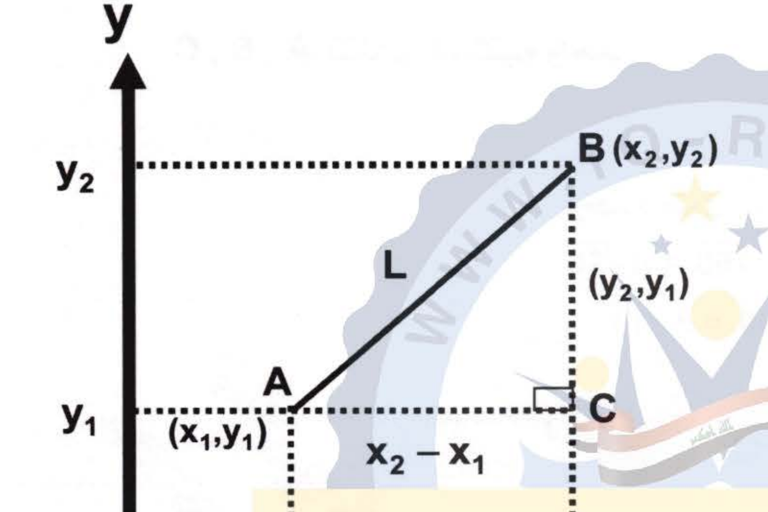
② $(2x\ ,3y) - (y\ ,-5x) = (4\ ,-7)$

س4/ اذا كان $\overrightarrow{A} = (3\ ,4)$, $\overrightarrow{B} = (5\ ,0)$ برهن ان $\frac{\overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}}{\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|}$ هو متجه وحدة.

الفصل السادس

الهندسة الاحداثية





لتكن $B(x_2,y_2)$, $A(x_1,y_1)$

نقطتين في المستوي

ومن $\triangle ABC$ القائم الزاوية في C يكون :

$L^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ (فيثاغورس)

$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

قانون المسافة بين نقطتين

أو بطريقة اخرى /

اذا علمنا ان احداثيات طرفي متجه حر مثل $\overrightarrow{AB}$ فانه يمكن التعبير عن المتجه الحر بدلالة هذه الاحداثيات وباستخدام الخاصية التالية :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$$
$$= (x_2,y_2) - (x_1,y_1)$$
$$= (x_2 - x_1 , y_2 - y_1)$$

$$\therefore \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ايجاد المسافة بين نقطتين معلومتين

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

ملاحظة مهمة / لايجاد $\overline{AB}$ فان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

مثال1/ اثبت ان النقط $A=(-2,7)$, $B=(-3,4)$, $c=(1,16)$ تنتمي لمستقيم واحد .

الحل /

$\overleftarrow{AB} = \overleftarrow{B} - \overleftarrow{A} = (-3,4) - (-2,7) = (-1,-3)$

$\overleftarrow{AC} = \overleftarrow{C} - \overleftarrow{A} = (1,16) - (-2,7) = (3,9) = -3(-1,-3)$

$\therefore \overleftarrow{AB} = -3\ \overleftarrow{AC}$

$\therefore$ A , B , C تنتمي لمستقيم واحد .

طريقة ثانية لحل المثال

$AB = \sqrt{(-2+3)^2+(7-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ وحدة طول

$BC = \sqrt{(-3-1)^2(4-16)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ وحدة طول

$AC = \sqrt{(-2-1)^2+(7-16)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ وحدة طول

$BC = AB + AC$

A,B,C تنتمي لمستقيم واحد والا لكانت رؤوس مثلث اذ ان مجموع اي ضلعين في مثلث اكبر من الضلع الثالث

مثال2/ برهن ان المثلث الذي رؤوسه النقط $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(5,-1)$ هو مثلث قائم الزاوية ؟

الحل /

$AB = \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وحدة طول

$AC = \sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$ وحدة طول

$BC = \sqrt{(5-2)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ وحدة طول

حسب مبرهنة فيثاغورس $(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2$

$20 = 2 + 18$ $\therefore \Delta$ A B C قائم الزاوية في B

مثال3/ بين ان النقط $A(-3,-1)$, $B(1,-4)$, $C(10,-5)$, $D(6,-2)$ تمثل رؤوس متوازي اضلاع ؟

الحل / نفرض ان نقطة المنتصف لقطري الشكل الرباعي تمثل (R) ولايجاد قيمة هذه النقطة بدلالة القطر (AC)

$$R = (\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$R = (\frac{-3+10}{2} , \frac{-1-5}{2})$$

$$R = (\frac{7}{2} , -3)$$

بدلالة القطر (BD)

$$R = (\frac{1+6}{2} , \frac{-4-2}{2}) = \qquad R = (\frac{7}{2} , -3)$$

$\therefore$ الشكل الرباعي هو متوازي اضلاع لان قطراه متناصفان .

مثال4/ اذا كانت النقط $A(3,2a)$ ، $B(a,1)$ ، $C(4,1)$ هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه $AB = AC$ جد قيمة $a \in R$

الحل /

طول قطعة المستقيم $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بما ان $AB = AC$ (معطى)

$$\therefore \sqrt{(3-a)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2a-1)^2}$$

بتربيع الطرفين $(3-a)^2 + (2a-1)^2 = (3-4)^2 + (2a-1)^2$

$$(3-a)^2 + (2a-1)^2 - (2a-1)^2 = (-1)^2$$

$$(3-a)^2 = 1$$

$$(3-a) = \mp 1$$

اما $3-a=1 \rightarrow a = 3-1 = 2$

او $3-a=-1 \rightarrow a = 3+1 = 4$ تهمل

$$\therefore a = 2$$

A(3,2a)

C(4,1) B(a,1)

سبب اهمال القيمة (4) هو لان النقطة $B(a,1)$ سوف تصبح $B(4,1)$ بعد التعويض وهي نفس مساقط النقطة $C(4,1)$ وهذا غير ممكن لانه سوف تصبح هنالك نقطتان فقط وهذا خلاف المعطى وهي ثلاث نقاط وليست نقطتان .

حلول تمارين (1 – 6)

س1/ جد المسافة بين كل زوج من النقاط الاتية .

(أ) (0,0) , (3,4)

$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ وحدة طول

(ب) (1,2) , (6,4)

$\sqrt{(6-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ وحدة طول

(جـ) (5,1) , (-3,-5)

$\sqrt{(-3-5)^2+(-5-1)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ وحدة طول

(د) (-2,3) , (-1,4)

$\sqrt{(-1+2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وحدة طول

س2/ جد محيط المثلث الذي رؤوسه A(5,7) , B(1,10) , C(-3,-8)

الحل /

$AB = \sqrt{(1-5)^2+(10-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ وحدة طول

$BC = \sqrt{(-3-1)^2+(-8-10)^2} = \sqrt{16+324} = 2\sqrt{85} = 18.4$ وحدة طول

$AC = \sqrt{(-3-5)^2+(-8-7)^2} = \sqrt{289} = 17$ وحدة طول

المحيط = $5 + 17 + 18.4 = 40.4$ وحدة طول

س3/ رؤوس شكل رباعي هي A(4,-3) , B(7,10) , C(-8,2) , D(-1,-5) جد طول قطريه ؟

الحل / طول قطعة المستقيم = $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

القطر $AC = \sqrt{(-8-4)^2+(2+3)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ وحدة طول

القطر $BD = \sqrt{(-1-7)^2+(-5-10)^2} = \sqrt{64+225} = 17$ وحدة طول

س4/ اثبت ان النقط $D(8,-9)$, $C(0,-7)$, $B(-5,0)$, $A(3,-2)$ هي رؤوس متوازي اضلاع ؟

الحل /

$\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{B} - \overleftrightarrow{A}$

$\overleftrightarrow{AB} = (-5,0) - (3,-2)$

$\overleftrightarrow{AB} = (-5,0) + (-3,2)$

$\overleftrightarrow{AB} = (-8,2)$

$\overleftrightarrow{DC} = \overleftrightarrow{C} - \overleftrightarrow{D}$

$\overleftrightarrow{DC} = (0,-7) - (8,-9)$

$\overleftrightarrow{DC} = (0,-7) + (-8,9)$

$\overleftrightarrow{DC} = (-8,2)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{DC}$ وهما لاشتركان بنقطة

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{C} - \overleftrightarrow{B}$

$\overleftrightarrow{BC} = (0,-7) - (-5,0)$

$\overleftrightarrow{BC} = (0,-7) + (5,0) = (5,-7)$

$\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{D} - \overleftrightarrow{A}$

$\overleftrightarrow{AD} = (8,-9) - (3,-2)$

$\overleftrightarrow{AD} = (8,-9) + (-3,2) = (5,-7)$

$\overleftrightarrow{BC} = \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

ولايشتركان بنقطة واحدة

$\therefore$ النقاط A,B,C,D هي نقاط متوازي اضلاع

حل اخر للسؤال

$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{(-5-3)^2 + (0+2)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ وحدة طول

$\overline{BC} = \sqrt{(0+5)^2 + (-7-0)^2}$

$\overline{BC} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$ وحدة طول

$\overline{CD} = \sqrt{(8-0)^2 + (-9+7)^2}$

$\overline{CD} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$ وحدة طول

$\overline{AD} = \sqrt{(8-3)^2 + (-9+2)^2}$

$\overline{AD} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$ وحدة طول

$\therefore AB = CD$

$BC = AD$

$\therefore$ النقاط A,B,C,D هي نقاط متوازي اضلاع

س5/ اذا كانت $A(-2,5)$, $B(3,3)$, $C(-4,2)$ ثلاث رؤوس من متوازي اضلاع ABCD جد احداثي نقطة D

الحل / نفرض ان نقطة $D(m,n)$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{AD} = (w,n) - (-2,5)$

$\overrightarrow{AD} = (w,n) + (2,-5)$

$\overrightarrow{AD} = (w+2 , n-5)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{BC} = (-4,2) - (3,3)$

$\overrightarrow{BC} = (-4,2) + (-3,-3)$

$\overrightarrow{BC} = (-7,-1)$

$\because$ حسب خواص المتوازي الاضلاع $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore (w+2 , n-5) = (-7,-1)$

$w+2 = -7 \rightarrow$

$w = -7-2$

$w = -9$

$n-5 = -1$

$n = -1+5$

$n = 4$

$\therefore$ نقطة $D(-9,4)$

حل اخر للسؤال

بما ان الشكل A , B, C, D متوازي اضلاع

اذن قطراه متناصفان في نقطة مثل L

بما ان نقطة L هي منتصف القطر الاول $\overline{AC}$

لذلك نجد احداثي نقطة L

من خلال احداثيي القطر $\overline{AC}$

$$L = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$L = \left(\frac{-2-4}{2} , \frac{5+2}{2}\right)$$

$$L = \left(-3 , \frac{7}{2}\right)$$

نفرض ان احداثي نقطة $D(w,n)$

ومن خلال معرفة نقطة المنتصف L

نجد نقطة D من خلال القطر $\overline{BD}$

$L_x = \frac{x_1+x_2}{2} \rightarrow -3 = \frac{w+3}{2}$

$w+3 = -6 \rightarrow w = -6-3$

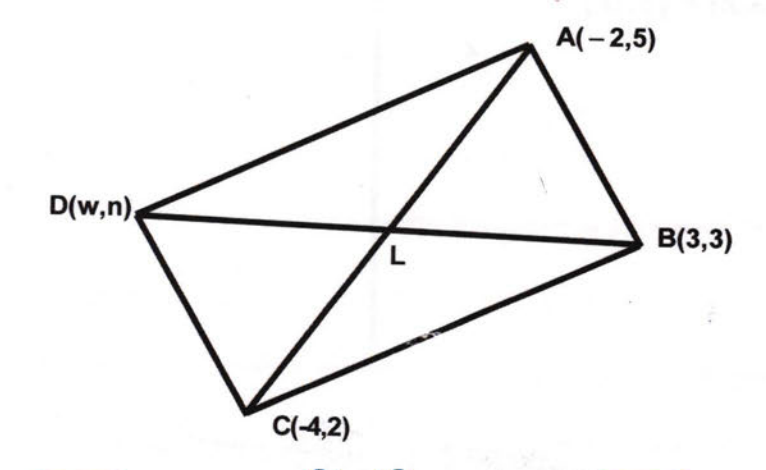
$w = -9$

$L_y = \frac{y_1+y_2}{2} \rightarrow \frac{7}{2} = \frac{n+3}{2}$

$2n+6 = 14 \rightarrow 2n = 14-6$

$2n = 8 \rightarrow n = 4$

اذن نقطة D هي $(-9,4)$



س6/ بين ان المثلث الذي رؤوسه $C(3,-4)$, $B(-1,-1)$, $A(2,3)$ هو مثلث متساوي الساقين

الحل /

$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}$

$\overline{AB} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ وحدة طول

$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2+(-1+4)^2} = \sqrt{16+9}$

$\overline{BC} = \sqrt{25} = 5$ وحدة طول

$\overline{AC} = \sqrt{(3-2)^2+(-4-3)^2} = \sqrt{1+49}$

$\overline{AC} = \sqrt{50}$ وحدة طول

[$\because$ $\overline{AB} = \overline{BC}$ $\therefore$ المثلث متساوي الساقين]

س7/ اثبت ان النقط $(0,0)$, $(6,8)$, $(-3,-4)$ تقع على استقامة واحدة

الحل /

$A(-3,-4)$, $B(6,8)$, $C(0,0)$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$= (6,8)-(-3,-4) = (9,12) = 3(3,4)$

$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B}$

$= (0,0)-(6,8) = (-6,-8) = -2(3,4)$

وهما يشتركان بنقطة B

اذن النقط A , B , C على استقامة واحدة

حل ثاني /

$AB = \sqrt{(-3-6)^2 + (-4-8)^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{255} = 15$ وحدة طول

$BC = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ وحدة طول

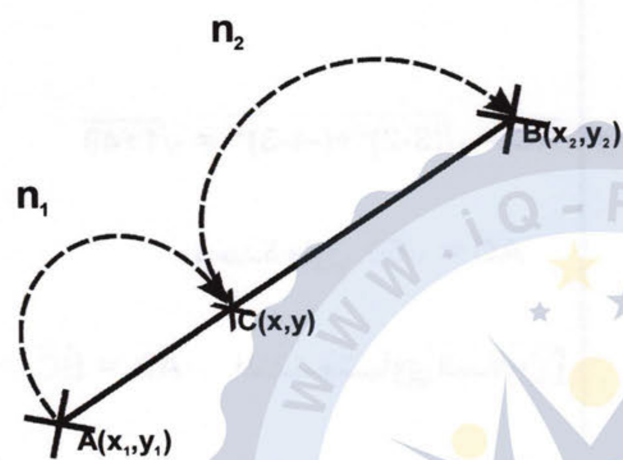
$AC = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ وحدة طول

$AC + BC = 5 + 10 = 15 = AB$

اذن النقط A , B , C على استقامة واحدة

[3 – 6] احداثيات نقطة تقسيم معلوم (من الداخل)

يقصد بتقسيم قطعة مستقيم من الداخل ايجاد احداثيات نقطة تقع بين نقطتي نهايتها بحيث تقسمها بنسبة معلومة.



ولنفرض أن $A = (x_1 , y_1)$, $B = (x_2 , y_2)$

والمطلوب ايجاد C التي تقسم $\overline{AB}$

من الداخل بنسبة $n_1 : n_2$

لذلك نقول : نفرض $C = (x,y)$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{n_1}{n_2}$$

فان $Y = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2}$ كذلك $X = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2}$

نقطة التقسيم C $\left(\frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} , \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2}\right)$

مثال4/ جد احداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين $A(4,-3)$, $B(-5,0)$ نسبة $\frac{1}{2}$

الحل /

$$x = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(-5) + 2(4)}{1 + 2} = \frac{-5 + 8}{3} = 1$$

$$y = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{1(0) + 2(-3)}{1 + 2} = \frac{-6}{3} = -2$$

∴ احداثيات نقطة التقسيم هي $(1 , -2)$

نقطة تنصيف القطعة المستقيمة

نفرض ان M نقطة تنصيف $\overline{AB}$ حيث $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ فان :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_1}{2} , \frac{y_1 + y_1}{2} \right)$$

ولاثبات هذا القانون نجعل $n_1 = n_2 = n$ ثم نعوض في القانون السابق

$$X = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1+n_2}$$

$$X = \frac{nx_2 + nx_1}{n + n} = \frac{n(x_2 + x_1)}{2n} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

وكذلك بالنسبة الى y حيث $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

حلول تمارين (2 – 6)

س1/ جد احداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة AB حيث A(1,3) , B(4,6) بنسبة $\frac{2}{1}$ ؟

الحل / نفرض ان نقطة التقسيم هي C(x,y)

$$x_c = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1} = \frac{8 + 1}{3} = 3$$

$$y_c = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{2 \times 6 + 1 \times 3}{1 + 2} = \frac{15}{3} = 5$$

∴ نقطة C(3,5)

س2/ جد احداثيات النقطة التي تنصف قطعة المستقيم AB حيث A(2,- 4) , B(- 3,- 6)

الحل / نفرض ان C هي نقطة منتصف $\overline{AB}$

$$C = (\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2})$$

$$C = (\frac{2 + (- 3)}{2} , \frac{- 4 + (- 6)}{2})$$

$$C = (\frac{-1}{2} , \frac{-10}{2}) = (\frac{-1}{2} , - 5)$$ نقطة المنتصف

س3/ جد احداثيات النقطة C التي تقسم قطعة المستقيم AB بنسبة $\frac{3}{5}$ حيث A(2,1) , B(1,-3)

الحل /

$$x_c = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times 1 + 5 \times 2}{3 + 5} = \frac{13}{8}$$

$$y_c = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times -3 + 5 \times 1}{3 + 5} = \frac{-9 + 5}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore C(\frac{13}{8} , -\frac{1}{2})$$

س4/ جد احداثيات النقطة C التي تبعد عن A ثلاثة امثال بعدها عن B , حيث A(2,6) , B(4 ,- 4)

الحل / AC = 3 CB ⟵ $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{1}$

$$x_c = \frac{n_1x_2 + n_2x_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times 4 + 1 \times 2}{3 + 1} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$y_c = \frac{n_1y_2 + n_2y_1}{n_1 + n_2} = \frac{3 \times -4 + 1 \times 6}{3 + 1} = \frac{-12 + 6}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

∴ نقطة $C(\frac{7}{2} , \frac{-3}{2})$

س5/ جد احداثيات منتصفات اضلاع Δ ABC حيث $A(4,0)$, $B(5,2)$, $C(2,-3)$ ثم جد اطوال المستقيمات الواصلة بين رؤوس المثلث ومنتصفات الاضلاع المقابلة ؟

الحل /

نفرض h هي منتصف $\overline{AB}$

$$h = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$h = \left(\frac{4+5}{2} , \frac{0+2}{2}\right)$$

$$h = \left(\frac{9}{2} , 1\right)$$

نفرض ان D منتصف $\overline{BC}$

$$D = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$D = \left(\frac{5+2}{2} , \frac{2-3}{2}\right)$$

$$D = \left(\frac{7}{2} , \frac{-1}{2}\right)$$

نفرض ان U منتصف $\overline{AC}$

$$U = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$U = \left(\frac{4+2}{2} , \frac{0-3}{2}\right)$$

$$U = \left(3 , \frac{-3}{2}\right)$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\left(0+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ وحدة طول

$$\overline{Ch} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}-2\right)^2+(1+3)^2}$$

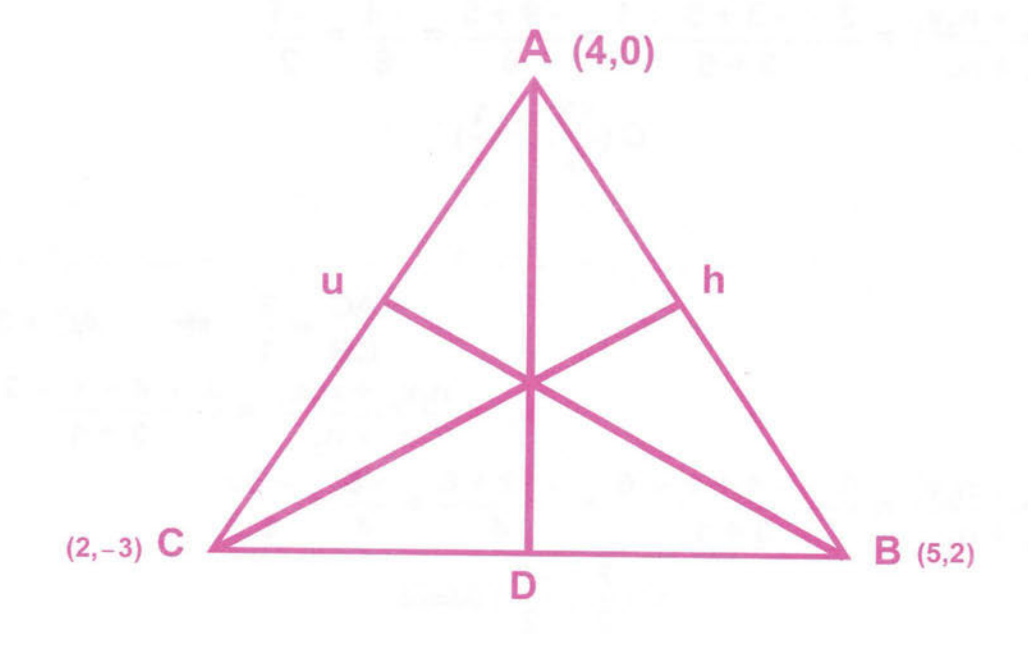
$$\overline{Ch} = \sqrt{\frac{25}{4}+16}$$

$$\overline{Ch} = \sqrt{\frac{89}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$ وحدة طول

$$\overline{BU} = \sqrt{(5-3)^2+(2+-)^2}$$

$$\overline{BU} = \sqrt{4+\frac{49}{4}}$$

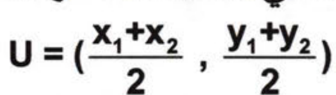
$$\overline{BU} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$ وحدة طول



س6/ بين ان قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسه (8-,5-)D , (3-,3-)C , (1,3)B , (2-,1-)A ينصف القطر الاخر؟

الحل /

نفرض ان U هي منتصف القطر $\overline{AC}$



$$U = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$U = \left(\frac{-1-3}{2}, \frac{-2-3}{2}\right)$$

$$U = \left(-2, \frac{-5}{2}\right)$$

نفرض ان U هي منتصف القطر $\overline{BD}$

$$U = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$U = \left(\frac{1-5}{2}, \frac{3-8}{2}\right)$$

$$U = \left(-2, \frac{-5}{2}\right)$$

∴ القطران متناصفان لان نقطة المنتصف لكل قطر مساوية لمنتصف القطر الاخر

[6 – 4] ميل المستقيم Slope of Line

تعريف [6 – 1]

اذا كانت $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ فان

ميل المستقيم AB = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بشرط $x_1 \neq x_2$.

ملاحظة /

(1) اذا كان $y_2 - y_1 = 0$ يعني ان ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = صفرا

أي ان $\overleftrightarrow{AB}$ // محور السينات

بمعنى ان ميل محور السينات = ميل كل مستقيم موازله = صفر

(2) اذا كان $x_2 - x_1 = 0$ يعني ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير معرف

أي ان $\overleftrightarrow{AB}$ // محور الصادات

بمعنى ان ميل محور الصادات = ميل كل مستقيم موازيا له ويكون غير معرف

(3) اذا كانت Q قياسا للزاوية الموجبة التي يصنعها $\overleftrightarrow{AB}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فان ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي tanQ حيث $Q \in (0, 180°) / \{90°\}$

مثال6/ جد ميل المستقيم المار بالنقطتين A(2,3) , B(5,1)

الحل / $m\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-3}{5-2} = \frac{-2}{3}$

[5 – 6] شرط التوازي Parallel Condition

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه وبالعكس أي $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ اذا وفقط اذا $m_2 = m_1$.

مثال7/ بين ان النقاط A(4,3) , B(2,1) , C(1,0) تنتمي لمستقيم واحد ؟

الحل / $m\overleftrightarrow{AB} = \frac{1-3}{2-4} = \frac{-2}{-2} = 1$ ، $m\overleftrightarrow{BC} = \frac{0-1}{1-2} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\because m\overline{AB} = m\overline{BC}$

$\therefore$ C , B , A تنتمي لمستقيم واحد .

[6 – 6] شرط التعامد Perpendicular Condition

اذا تعامد مستقيمان فان حاصل ضرب ميلاهما = 1- وبالعكس

أي $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ اذا وفقط اذا $m_1 \times m_2 = -1$

او $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ أي ميل احدهما يساوي مقلوب الاخر بعكس الاشارة

مثلا اذا كان ميل مستقيم يساوي $\frac{-3}{4}$ فاي مستقيم يوازيه يكون ميله = $\frac{-3}{4}$ واي مستقيم عمود عليه يكون ميله = $\frac{4}{3}$

حلول تمارين (3 – 6)

س 1/

(1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (2,0),(0,-2)

الحل / الميل 1 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

---

(2) بين ان النقاط (-7,6),(-1,4),(2,3) على استقامة واحدة

الحل /

$$m\,AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{-1-2} = \frac{-1}{3}$$

$$m\,AC = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{-7-2} = \frac{3}{-9} = \frac{-1}{3}$$

$\overline{AB} \parallel \overline{AC}$ لان ميلهما متساوي ويشتركان في نقطة A

∴ النقاط A,B,C تقع على استقامة واحدة

---

(3) اذا كانت A(2,3) , B(-3,h) جد قيمة h بحيث يكون $m\overline{AB} = \frac{1}{2}$

الحل /

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h-3}{-3-2}$$

$$2h-6=-5$$

$$2h = -5+6 \rightarrow 2h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{2}$$

---

(4) ABC مثلث رؤوسه A(1,6) , B(-2,-8) , C(7,-2) جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث ABC المار من B

الحل / نفرض ان D هي منتصف $\overline{AC}$

$$D = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \rightarrow D = (4,2)$$

ميل المستقيم المتوسط $m\,\overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8-2}{-2-4} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$

س2/ لكل فقرة مما يأتي اربع اجابات واحدة منها صحيحة , حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرة :

(1) اذا كان $\overleftrightarrow{H} \perp \overleftrightarrow{L}$ وان $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين (2,3) , (1,5) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) -2 (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{-2}{3}$

الحل /

$$m\overleftrightarrow{H} = \frac{3-5}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\because m\overleftrightarrow{L} = \frac{1}{m\overleftrightarrow{H}} \text{ (متعامدان)}$$

$$\therefore m\overleftrightarrow{L} = \frac{1}{2}$$

(الفقرة(أ) هي الاجابة الصحيحة)

---

(2) اذا كان $\overleftrightarrow{H} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ وان $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين (2-,3),(2,3-) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{-3}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{-2}{3}$

الحل /

$$m\overleftrightarrow{H} = \frac{-2-2}{3+3} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$\because m\overleftrightarrow{L} = m\overleftrightarrow{H} \text{ (متوازيان)}$$

$$\therefore m\overleftrightarrow{L} = \frac{-2}{3}$$

(الاجابة (د) هي الصحيحة)

---

(3) اذا كان $\overleftrightarrow{H} \,//\, \overleftrightarrow{L}$, حيث $(-1,5) , (-1,3) \in \overleftrightarrow{L}$ وان $(x,6) , (3,4) \in \overleftrightarrow{H}$
فان قيمة x تساوي

(أ) 3- (ب) 3 (جـ) 1 (د) ليس ايا مما سبق صحيح

الحل /

بما ان $\overleftrightarrow{H} \,//\, \overleftrightarrow{L}$

$\therefore m\overleftrightarrow{L}$ غير معرف

المستقيم الواصل بين (3,4),(x,6)

يوازي محور الصادات فتكون قيمة $x = 3$

$\therefore$ الجواب فرع (ب)

$$m\overleftrightarrow{H} = m\overleftrightarrow{L} \text{ (متوازيان)}$$

$$\frac{6-4}{x-3} = \frac{5-3}{-1+1}$$

$$\frac{2}{x-3} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{2}{0} \notin R\right] \text{ حيث ان}$$

$$m\overleftrightarrow{L} = \frac{2}{0} \text{ غير معرف}$$

أي ان $\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{y}$

س3/ (1) بأستخدام الميل بين ان النقط A(5,2) , B(-2,-1) , C(2,-2) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية .

الحل /
$$m\,\overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{2-5} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{-2-1}{2+2} = \frac{-3}{4}$$

$$m\,\overline{AC} \times m\overline{BC} = \frac{4}{3} \times \frac{-3}{4} = -1$$

$\because$ $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ لان حاصل ضرب ميلهما = 1-

$\therefore$ المثلث ABC قائم الزاوية في C

---

(2) لتكن A(5,-1) , B(5,1) , C(6,-2) , D(0,2) بين ان الشكل ABCD متوازي اضلاع .

الحل /
$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{5+1} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$m\,\overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{6-0} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$\because$ $m\,\overline{AB} = m\,\overline{DC}$ ← $\therefore$ $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$

$$m\,\overline{AD} = \frac{2-5}{0+1} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{-2-1}{6-5} = \frac{-3}{1} = -3$$

$\because$ $m\,\overline{AD} = m\,\overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

$\therefore$ الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع

---

(3) A(5,2) , B(2,−1) , C(−1,2) , D(2,5) بين ان الشكل ABCD هو مربع .

الحل /

$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18}$ وحدة طول

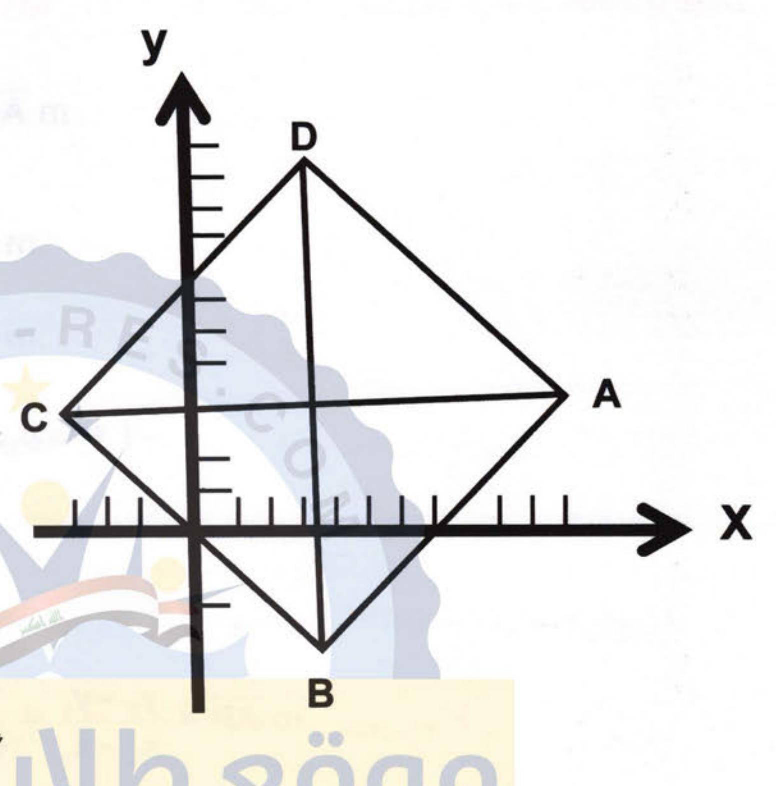
$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{18}$ وحدة طول

$CD = \sqrt{(2+1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{18}$ وحدة طول

$DA = \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{18}$ وحدة طول

$\therefore AB = BC = CD = DA$

$\therefore$ الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع



$$m_{AD} = \frac{5-2}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$m_{DC} = \frac{5-2}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\therefore m_{AD} \times m_{DC} = -1$$

$$\therefore \overline{AD} \perp \overline{DC}$$

$\therefore \measuredangle D = 90^\circ$ (قائمة)

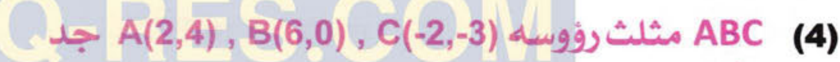
$$m_{AC} = \frac{2-2}{-1-5} = 0$$

$\therefore AC$ // محور السينات

$m_{DB} = \frac{-1-5}{2-2} = \frac{-5}{0}$ غير معرف

$\therefore DB$ // محور الصادات

بما ان المحورين السيني والصادي متعامدان
اذن قطري الشكل DB , AC متعامدان
اذن الشكل ABCD هو مربع



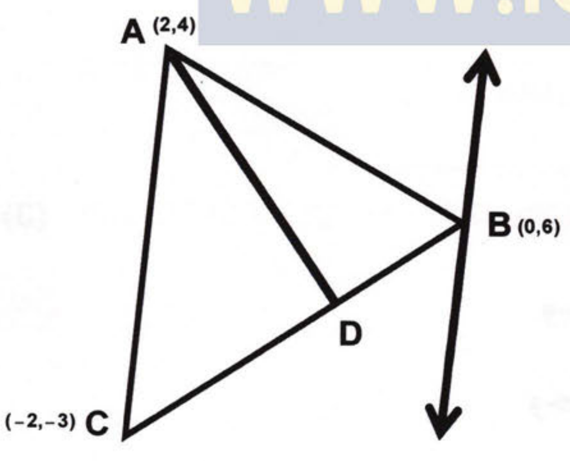
---

(4) ABC مثلث رؤوسه A(2,4) , B(6,0) , C(-2,-3) جد

(أ) ميل العمود المرسوم من A على $\overline{BC}$



(ب) ميل المستقيم المرسوم من B وموازيا لـ $\overline{AC}$



الحل / (أ)

$$m\ \overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m\ \overline{BC} = \frac{-3-0}{-2-6}$$

$$m\ \overline{BC} = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8} \rightarrow \therefore m\ \overline{AD} = \frac{-8}{3}$$

لان $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

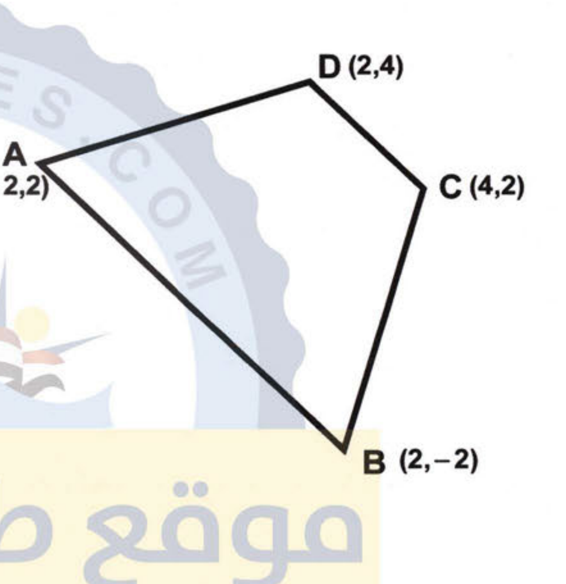
(ب) $m\ \overline{AC} = \frac{-3-4}{-2-2} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$

$\therefore$ ميل المستقيم الموازي لـ $\overline{AC} = \frac{7}{4}$

---

(5) بين ان الشكل الرباعي الذي رؤوسه A(-2,2) , B(2,-2) , C(4,2) , D(2,4) يمثل شبه منحرف متعامد القطرين .

الحل /



$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{2+2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$m\,\overline{DC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

$\because\ m\,\overline{AB} = m\,\overline{DC}$

$\therefore\ \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$$m\,\overline{AD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-4}{-2-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\because\ m\,\overline{AD} \neq m\,\overline{BC}$

$\therefore\ \overline{AD} \nparallel \overline{BC}$

$\therefore$ الشكل ABCD شبه منحرف ولاثبات انه متعامد القطرين نجد ميل القطرين

$$m\,\overline{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{4+2} = \frac{0}{6} = 0$$

$\therefore$ القطر $\overline{AC}$ يكون موازيا لمحور السينات لان ميله = صفر

$$m\,\overline{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4+2}{2-2} = \frac{6}{0} = \text{كمية غير معرفة}$$

$\therefore$ القطر $\overline{AC}$ يكون موازيا لمحور الصادات لان ميله = غير معرف

$\therefore$ القطران متعامدان .

---

(6) جد قيمة x التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين (9-,2-) (x,4) عمودا على المستقيم المار بالنقطتين (4,1) , (0,3)

الحل / نفرض ان A(x,4) , B(-2,-9)

$$m\,\overline{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-9-4}{-2-x} = \frac{-13}{-2-x}$$

نفرض ان $C(4,1)$, $D(0,3)$

$$m\,\overline{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{0-4} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

$\because$ المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان (معطى)

$$\therefore m\,\overleftrightarrow{AB} \times m\,\overleftrightarrow{CD} = -1$$

$$\frac{-13}{-2-x} \times \frac{-1}{2} = -1$$

$$\frac{13}{-4-2x} = -1$$

$$-1(-4-2x) = 13$$

$$4+2x = 13 \rightarrow 2x = 13-4 \rightarrow 2x = 9$$

$$\boxed{\therefore x = \frac{9}{2}}$$

[7 – 6] معادلة المستقيم Equation of The Line

اذا كانت (x,y) اية نقطة من نقاط أي مستقيم فان العلاقة بين x , y تسمى معادلة ذلك المستقيم .

والمعادلة القياسية العامة للمستقيم هي : $ax + by + c = 0$

(1) المستقيم الذي يقطع المحورين يمكن تمثيله بيانيا بوضع $x=0$

$$\therefore y = \frac{-c}{b}$$

بوضع $y = 0 \leftarrow x = \frac{-c}{a}$

(2) وعندما يكون $b=0$ يكون $ax + c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي ومنها $x=0$ تمثل معادلة المحور الصادي .

(3) وعندما يكون $a=0$ يكون $by + c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ومنها $y=0$ تمثل معادلة المحور السيني .

(4) وعندما يكون $c=0$ يكون $ax + by = 0$ تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الاصل .

كيفية ايجاد معادلة المستقيم

(1) اذا علمت منه نقطتان :

معادلة المستقيم AB حيث $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$:

لتكن $\overleftrightarrow{AB} \ni C(x,y)$ فان :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

قانون ايجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطتين .

(2) اذا علمت منه نقطة وميل :

من القانون السابق $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

.... قانون ايجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل .

(3) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات هي $x = a$ وكل مستقيم يمر بالنقطة (x_1,y_1) ويوازي محور الصادات تكون معادلته $x = x_1$

مثال / جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (3 , 2)

الحل / معادلة المستقيم $x = 2$

(4) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات $y = b$ وكل مستقيم يمر بالنقطة (x_1,y_1) ويوازي محور السينات تكون معادلته $y = y_1$

مثال / جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (2− , 3) ويوازي محور السينات

الحل / معادلة المستقيم $y = -2$

مثال9/ جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (5 , 4) , (3 - , 2)

الحل /

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{5 + 3}{4 - 2}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{4}{2}$$

$$2y + 6 = 4x - 8$$

$\therefore$ $4x - 2y - 14 = 0$ .... معادلة المستقيم

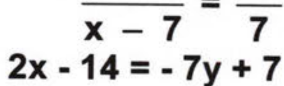
y
x
(4,5)
(2,−3)

مثال10/ جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0,3) , (7,1) وهل ان النقطة (3,4) تنتمي اليه ام لا ؟

الحل /

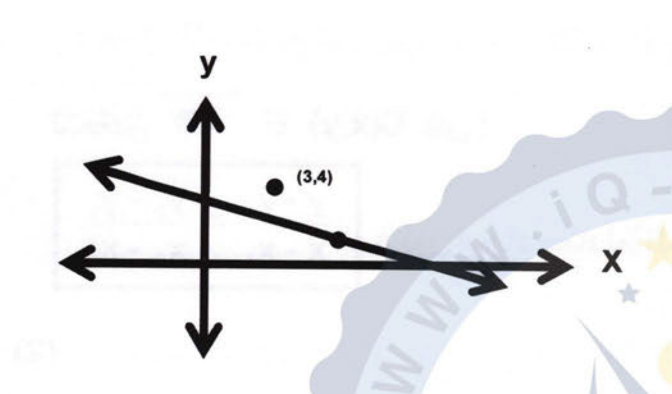
$$\frac{y-1}{x-7} = \frac{3-1}{0-7}$$

$$\frac{y-1}{x-7} = \frac{-2}{7}$$



$$2x - 14 = -7y + 7$$

$2x + 7y - 21 = 0$ .... معادلة المستقيم



لكي نتأكد ان (3,4) تنتمي للمستقيم ام لا ,
نعوض عن y=4 , x=3 في معادلة المستقيم .

$$2(3) + 7(4) - 21 \stackrel{?}{=} 0$$

$$6 + 28 - 21 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\therefore \quad 13 \neq 0$$

$\therefore$ النقطة (3,4) لاتنتمي للمستقيم .

مثال11/ جد معادلة المستقيم المار من النقطة (1,-3) وميله $\frac{1}{2}$.

الحل /

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\left[y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1)\right] \times 2$$

$$2y + 6 = x - 1$$

$x - 2y - 7 = 0$ .... معادلة المستقيم

مثال12/ جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة A(-2,5) ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان C(-2,3) , B(4,-1)

الحل /

لتكن D منتصف $\overline{BC}$

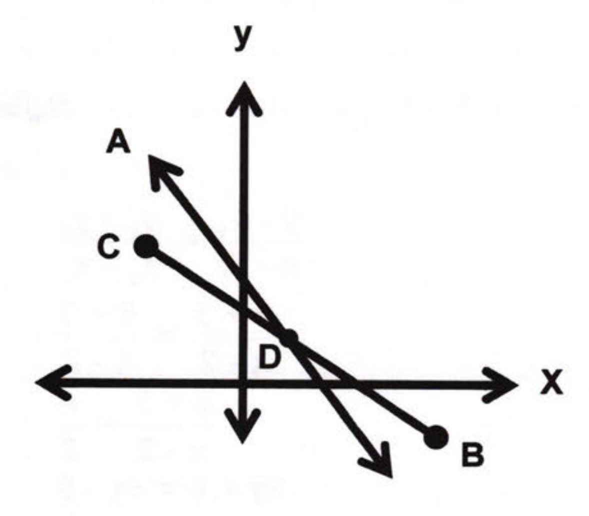
$$D = \left(\frac{4 + (-2)}{2} , \frac{-1 + 3}{2}\right) = (1 , 1)$$

معادلة $\overleftrightarrow{AD}$ هي : $\frac{y-5}{x+2} = \frac{1-5}{1+2}$

$$\frac{y-5}{x+2} = \frac{-4}{3}$$

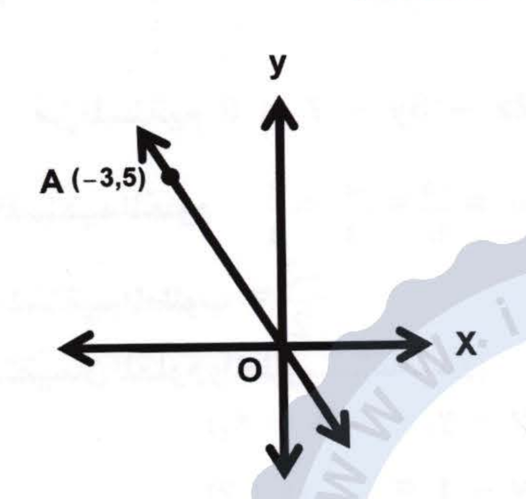
$$\therefore \quad 3y - 15 = -4x - 8$$

$4x + 3y - 7 = 0$ .... معادلة المستقيم



مثال13/ جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (-3,5)

الحل /



$O(0,0)$, $A(-3,5)$

معادلة المستقيم OA هي :

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{5-0}{-3-0}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{5}{-3}$$

$$5x = -3y$$

$5x + 3y = 0$ .... معادلة المستقيم .

نتيجة / يمكن ايجاد ميل المستقيم من معادلته :

نفرض ان معادلة المستقيم : $ax + by + c = 0$

ميل المستقيم = $\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}$ بعكس الاشارة

بشرط x , y في طرف واحد من المعادلة وان $b \neq 0$

∴ ميل المستقيم = $\frac{- x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}}$

أي ميل المستقيم = $\frac{-a}{b}$

مثال14/ جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته : $3x - 4y - 12 = 0$

الحل /

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

المقطع الصادي : نعوض عن $x = 0$

فيكون : $-4y - 12 = 0 \rightarrow y = -3$

اذن المقطع الصادي هو $(0, -3)$

طريقة ثانية / لايجاد المقطع الصادي

$y = \frac{-C}{b} = \frac{-(-12)}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$

اذن المقطع الصادي هو $(0, -3)$

مثال15/ جد معادلة المستقيم الذي يصنع من الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $150°$ ويمر بالنقطة (4- , 1) .

الحل / ميل المستقيم

$m = \tan 150°$

$m = \tan(180° - 30°) = -\tan 30°$

$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\because y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore y + 4 = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x - 1)$

$x + \sqrt{3}\,y + 4\sqrt{3} - 1 = 0$ معادلة المستقيم .

مثال16/ جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (1 , 2-) وعمودي على المستقيم الذي معادلته $2x - 3y - 7 = 0$

الحل / من المستقيم $2x - 3y - 7 = 0$

ميل المستقيم المعلوم $m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

اذن ميل المستقيم المطلوب $= \frac{-3}{2}$

(لان المستقيمان المعلوم والمطلوب متعامدان)

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-3}{2}(x + 2)$

$\left[y - 1 = \frac{-3}{2}(x + 2)\right] \times 2$

$2y - 2 = -3(x + 2)$

$2y - 2 = -3x - 6$

$3x + 2y - 2 + 6 = 0$

$3x + 2y + 4 = 0$ معادلة المستقيم المطلوب

حلول تمارين (4 - 6)

س1/ (1) جد معادلة المستقيم الذي ميله $= \frac{-1}{2}$ ويمر بالنقطة (4,0-) .

الحل /

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4)$

$\left[y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4)\right] \times 2$

$2y - 0 = -1(x + 4)$

$2y - 0 = -x - 4$

معادلة المستقيم ← $x + 2y + 4 = 0$

---

(2) جد معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (2,-1)

الحل / ∵ المستقيم // محور السينات

∴ ميل المستقيم = صفر

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 0(x - 2)$

$y + 1 = 0$

$y = -1$ ← معادلة المستقيم

---

(3) جد معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (2,-1)

الحل / ∵ المستقيم // محور الصادات

∴ ميله غير معرف ∴ معادلة المستقيم هي $x = 2$

---

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (1,3-),(1,5-)

الحل / ∵ الاحداثي السيني ثابت والاحداثي الصادي متغير

∴ المستقيم // محور الصادات

وهذا يعني ان معادلة المستقيم هي $X = -1$

(5) جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (2,-1) والموازي الى $\overleftrightarrow{L_1}$ الذي ميله = $\frac{2}{3}$ (يعني ميل $\overleftrightarrow{L_1}$) ؟

الحل/ $\because \overleftrightarrow{L_1} // L$

$m\overleftrightarrow{L_1} = mL$

$\therefore mL = \frac{2}{3}$

لايجاد معادلة المستقيم L

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$

$\left[y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)\right] \times 3$

$3y + 3 = 2x - 4$

$2x - 3y - 4 - 3 = 0$

معادلة المستقيم L ← $2x - 3y - 7 = 0$

(6) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (0,-2) وعمودي على المستقيم الذي ميله = $\frac{-3}{5}$.

الحل / نفرض ان المستقيم المار بالنقطة (0,-2) هو M

نفرض ان المستقيم العمود عليه هو R

$\because$ المستقيمان متعامدان

$\therefore mM \times mR = -1$

$mM \times \frac{-3}{5} = -1$

$mM = \frac{-1}{\frac{-3}{5}} = -1 \times -\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

من معرفة ميل المستقيم M يمكن ايجاد معادلته وكالاتي :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = \frac{5}{3}(x - 0)$

$\left[y + 2 = \frac{5}{3}(x - 0)\right] \times 3$

$3y + 6 = 5(x - 0)$

$3y + 6 = 5x - 0$

معادلة المستقيم العمود

$5x - 3y - 6 = 0$ ←

---

(7) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,-4) وعموديا على المستقيم المار بالنقطتين (2,-2),(0,3)

الحل / نفرض ان المستقيم المار بالنقطتين هو D والمستقيم المار بالنقطة هو Z

نجد ميل المستقيم Z ← $mZ = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$mZ = \frac{-2 - 3}{2 - 0} = \frac{-5}{2}$

$\therefore$ ميل المستقيم D هو $\frac{2}{5}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$

$\left[y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3)\right] \times 5$

$5y + 20 = 2x - 6$

$2x - 5y - 6 - 20 = 0$

معادلة المستقيم D ← $2x - 5y - 26 = 0$

(8) لتكن $A(4,-2)$, $B(1,2)$ جد معادلة المستقيم العمود الذي ينصف AB

الحل / نفرض ان المستقيم العمود ينصف $\overline{AB}$ في نقطة C

$$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{4 + 1}{2} , \frac{-2 + 2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} , 0\right)$$

$$m\ \overline{AB} = \frac{2 + 2}{1 - 4} = \frac{-4}{3}$$

∴ ميل العمود هو $\frac{3}{4}$

∴ نجد المعادلة من الميل $\frac{-3}{4}$ والنقطة $C\left(\frac{5}{2} , 0\right)$

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\left[y - 0 = \frac{3}{4}x - \frac{15}{8}\right] \times 8$$

$$8y - 0 = 6x - 15$$

معادلة العمود على $\overline{AB}$ $\boxed{6x - 8y - 15 = 0}$

س2/

(1) جد معادلة المستقيم الذي ميله = 3- ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله 7 وحدات .

الحل / نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (0,7) .

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$
$$y - 7 = - 3 (x - 0)$$
$$y - 7 = - 3x + 0$$

$3x + y - 7 = 0$ ← معادلة المستقيم

---

(2) جد معادلة المستقيم الذي ميله = 2 ويقطع جزءا سالبا من محور السينات طوله 6 وحدات .

الحل / نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات (6,0-)

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$
$$y - 0 = 2 (x + 6)$$
$$y - 0 = 2x + 12$$

$2x - y + 12 = 0$ ← معادلة المستقيم

---

(3) جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما يأتي :

a- $\overleftrightarrow{L_1} : 2x - 3y + 5 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

المقطع الصادي = $\frac{-c}{b} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

---

b- $\overleftrightarrow{L_2} = 8y = 4x + 16 \rightarrow 4x - 8y + 16 = 0$

$\overleftrightarrow{L_2} : x - 2y + 4 = 0$ ميل المستقيم $m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

المقطع الصادي = $\frac{-c}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2,-5) ويوازي المستقيم الذي معادلته $2x - y + 3 = 0$.

الحل / نفرض ان المستقيم الذي يمر بالنقطة (2,-5) هو $\overleftrightarrow{N}$.

نفرض ان المستقيم الذي معادلته $2x - y + 3 = 0$ هو $\overleftrightarrow{W}$.

$$m\overleftrightarrow{W} = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\overleftrightarrow{N} \parallel \overleftrightarrow{W}$$

$\therefore m\overleftrightarrow{N} = 2$ ((المستقيمان المتوازيان ميلهما متساوي))

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 5 = 2(x - 2)$$
$$y + 5 = 2x - 4$$
$$2x - y - 4 - 5 = 0$$

$2x - y - 9 = 0$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{N}$

---

(5) جد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ الذي يقطع جزءا سالبا من محور الصادات طوله 4 وحدات وعمودي على المستقيم $2y = 4x - 1$

الحل / نفرض ان المستقيم الذي معادلته $4x - 2y - 1 = 0$ هو $\overleftrightarrow{N}$

$$m\overleftrightarrow{N} = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\because \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{N} \leftarrow \therefore m\overleftrightarrow{L} = \frac{-1}{2}$ والنقطة التي يمر بها (0,-4)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 4 = \frac{-1}{2}(x - 0)$$
$$\left[y + 4 = -\frac{1}{2}x\right] \times 2$$

$2y + 8 = -x \rightarrow \boxed{x + 2y + 8 = 0}$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$

---

(6) ليكن $\overleftrightarrow{L}$ مستقيما معادلته $x + y - 2 = 0$

جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم ارسم $\overleftrightarrow{L}$

الحل / الميل $m\overleftrightarrow{L} = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$

المقطع الصادي $= \frac{-c}{b} = \frac{-(-2)}{1} = 2$

$\therefore$ نقطة التقاطع مع المحور الصادي هي (0,2)

(7) جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (2,-2) وعمودي على المستقيم الذي معادلته $x + y = 0$ ثم جد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الاحداثيين .

الحل /

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{1} = -1$

ميل المستقيم المعلوم معادلته = 1-

$\therefore m_{\overleftrightarrow{L}} = 1$ (لان المستقيمان متعامدان)

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 2 = 1(x - 2)$

$y + 2 = x - 2$

$x - y - 2 - 2 = 0$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{L}$

$x - y - 4 = 0$

المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ يقطع المحور السيني عندما $y = 0$

$x - 0 - 4 = 0$

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ مع المحور السيني هي (0 , 4)

المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ يقطع المحور الصادي عندما $x = 0$

$0 - y - 4 = 0$

$-y = 4$

$y = -4$

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ مع المحور الصادي (4 - , 0)

---

(8) المستقيم $\overleftrightarrow{L} : 2x - y = 3$ والمستقيم $\overleftrightarrow{H} : 3x + 6y = -3$

(أ) بين ان $\overleftrightarrow{H} \perp \overleftrightarrow{L}$

الحل/

$m_{\overleftrightarrow{L}} = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$

$m_{\overleftrightarrow{H}} = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$

$m_{\overleftrightarrow{L}} \times m_{\overleftrightarrow{H}} = 2 \times \frac{-1}{2} = -1$

$\therefore$ المستقيمان $\overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{H}$ متعامدان لان حاصل ضرب ميلهما = 1-

(ب) نقطة تقاطع المستقيمين

الحل/

$6 \times [2x - y = 3]$

$3x + 6y = -3$

بالجمع

$12x - 6y = 18$ ....(1)

$3x + 6y = -3$ ....(2)

$15x = 15$

$x = \frac{15}{15}$

$\boxed{x = 1}$

نعوض في معادلة (2)

$(3 \times 1) + 6y = -3$

$3 + 6y = -3$

$6y = -3 - 3$

$6y = -6$

$y = \frac{-6}{6}$

$\boxed{y = -1}$

$\therefore$ نقطة تقاطع المستقيمين هي (1,-1)

(9) جد معادلة المستقيم الذي يصنع $135°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والمار بنقطة الاصل .

الحل /

ميل المستقيم $= \tan 135°$

ميل المستقيم $= \tan(135° - 45°)$

$m = -\tan 45°$

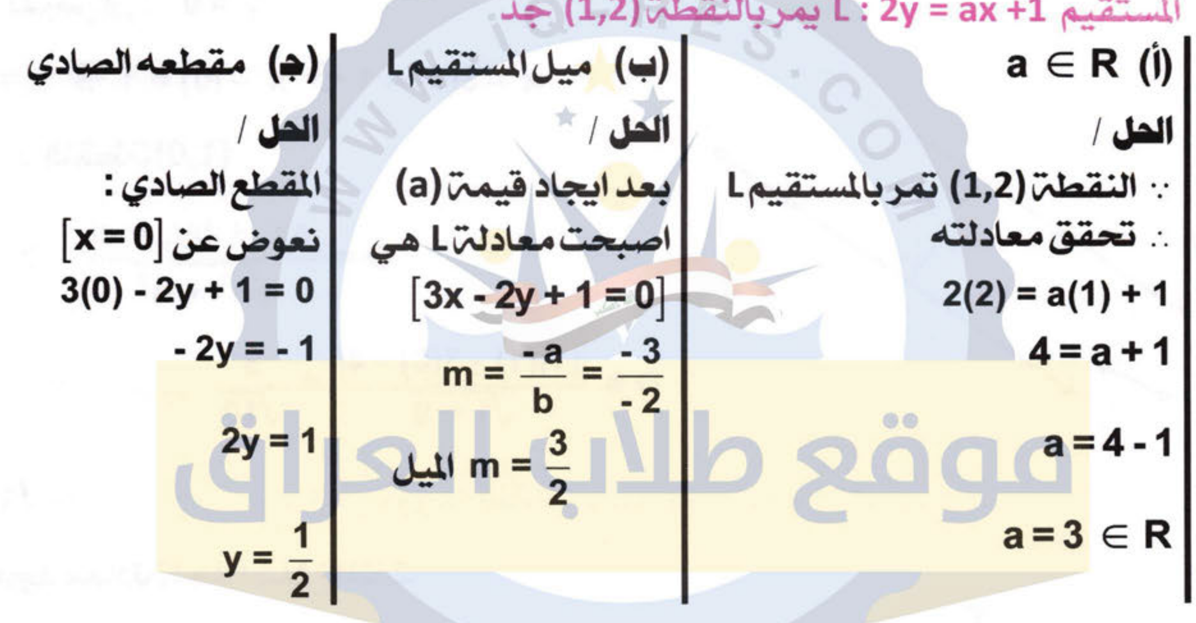
$m = -1$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = -1(x - 0)$

$y = -x$

∴ معادلة المستقيم ← $x + y = 0$



(10) المستقيم $L : 2y = ax + 1$ يمر بالنقطة $(1,2)$ جد

(أ) $a \in R$

الحل /

∵ النقطة $(1,2)$ تمر بالمستقيم L

∴ تحقق معادلته

$2(2) = a(1) + 1$

$4 = a + 1$

$a = 4 - 1$

$a = 3 \in R$

(ب) ميل المستقيم L

الحل /

بعد ايجاد قيمة (a) اصبحت معادلة L هي $[3x - 2y + 1 = 0]$

$m = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{-3}{-2}$

الميل $m = \dfrac{3}{2}$

(جـ) مقطعه الصادي

الحل /

المقطع الصادي :

نعوض عن $[x = 0]$

$3(0) - 2y + 1 = 0$

$-2y = -1$

$2y = 1$

$y = \dfrac{1}{2}$

[8 – 6] بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

تعريف [2 – 6]

اذا كان المستقيم $L : ax + by + c = 0$ والنقطة $N(x_1 , y_1)$ معلومة فيعرف بعد النقطة N عن المستقيم L بانه المسافة العمودية (D) بين النقطة N والمستقيم L وتعطى بالعلاقة الاتية :

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ..... قانون البعد

مثال17/ جد بعد النقطة $A(1,3)$ عن المستقيم : $2y+x=2$

الحل / نضع المعادلة بالشكل الاتي : $x + 2y - 2 = 0$ ç $a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = -2$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1) + (2)(3) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} \quad , \quad D = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ unit}$$

نتيجة / يمكن ايجاد البعد بين المستقيمين المتوازيين

حيث : $\overleftrightarrow{L_1} : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad , \quad \overleftrightarrow{L_2} : a_2x + b_2y + c_2 = 0$

البعد بين $\overleftrightarrow{L_2} \ , \ \overleftrightarrow{L_1} = \dfrac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال18/ جد البعد بين المستقيمين المتوازيين: $\overleftrightarrow{L_1} : x - 3y = 1 \ , \ \overleftrightarrow{L_2} : x - 3y = 4$

الحل / ناخذ نقطة على احد المستقيمين المتوازيين وليكن المستقيم $\overleftrightarrow{L_1}$

ثم نجد بعد هذه النقطة عن المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$

(البعد بين مستقيمين متوازيين هو بعد أي نقطة تنتمي لاحدهما عن الاخر)

نفرض ان: $y = 0$

$x - 3(0) = 1 \rightarrow x - (0) = 1 \rightarrow x = 1$

$\therefore$ النقطة $(1,0)$

$$\therefore \quad D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$D = \frac{|(1)(1) - 3(0) - 4|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$ وحدة طول

مثال19/ جد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقاط $A(1,2) \ , \ B(3,5) \ , \ C(-1,3)$

الحل / نجد معادلة احد اضلاع المثلث

وليكن المستقيم AB :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{5 - 2}{3 - 1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad 3x - 2y + 1 = 0$$

الان بعد النقطة $C(-1,3)$

عن المستقيم AB يمثل ارتفاع ΔABC

$$D = \frac{|3(-1) - 2(3) + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ unit}$$

نجد طول $AB = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$$\text{Aera } \Delta = \frac{1}{2}(AB) \cdot D$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{13}) \cdot \frac{8}{\sqrt{13}} = 4 \text{ unit}^2$$

حلول تمارين (5 – 6)

س1/ ضع علامة (✓) اذا كانت العبارة صائبة وعلامة (×) اذا كانت العبارة خاطئة فيما يأتي

(1) بعد نقطة الاصل عن الستقيم 3 = y هو 3 وحدات . ✓

(2) بعد نقطة الاصل عن المستقيم 5- = y هو 5 وحدات . ✓

(3) بعد نقطة الاصل عن المستقيم 5- = x هو 5 وحدات . ✓

(4) البعد بين المستقيمين المتوازيين 4 = y , 1- = y هو 3 وحدات . ✗

البعد بينهما = $\frac{|4-(-1)|}{\sqrt{0+1}} = \frac{|5|}{\sqrt{1}} = \frac{5}{1} = 5$ وحدات

س2/ **(1)** جد بعد النقطة (2,1-) عن المستقيم $6x + 8y - 21 = 0$

الحل / $a=6 \ , \ b=8 \ , \ C=-21$

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 \times -2 + 8 \times 1 + (-21)|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$D = \frac{|-12 + 8 - 21|}{\sqrt{100}} = \frac{|-25|}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$ وحدة طول

(2) جد بعد نقطة الاصل عن المستقيم الذي ميله = $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءا موجبا من محور الصادات طوله (4 وحدات) .

الحل /

$m = \frac{1}{3}$, (0,4) ويمر بالنقطة

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 0)$

$\left[y - 4 = \frac{1}{3} x \right] \times 3$

$3y - 12 = x$

$x - 3y + 12 = 0$ معادلة المستقيم

من معادلة المستقيم ونقطة الاصل نجد البعد (D)

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 0 + (-3 \times 0)\, 1 + 12|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$ وحدة طول

---

(3) جد البعد بين المستقيمين المتوازيين

$\overleftrightarrow{L_1} : 8x - 6y + 4 = 0 \rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$ (بالقسمة على 2)

$\overleftrightarrow{L_2} : 4x - 3y - 1 = 0 \rightarrow 4x - 3y - 1 = 0$

$$D = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-1)|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|3|}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$ وحدة طول البعد

---

(4) جد بعد النقطة (0,2) عن المستقيم المار بالنقطتين A(1,-1),B(3,5)

الحل /

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{5 + 1}{3 - 1}$$

$$\frac{y + 1}{x - 1} = \frac{6}{2}$$

معادلة المستقيم المار بالنقطتين $3x - y - 4 = 0$

البعد $D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

البعد $D = \frac{|3 \times 0 + (-1 \times 2) + (-4)|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$ وحدة طول

(5) جد مساحة المثلث ABC حيث A(-4,6) , B(-3,-1) , C(5,-2)

الحل / نجد معادلة $\overline{AC}$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 6}{x + 4} = \frac{-2 - 6}{5 + 4}$$

$$\frac{y - 6}{x + 4} = \frac{-8}{9}$$

$$-8x - 32 = 9y - 54$$

$$-8x - 9y - 32 + 54 = 0$$

$$-8x - 9y + 22 = 0$$

معادلة المستقيم $\overline{AC}$ ← $8x + 9y - 22 = 0$

بعد النقطة B عن المستقيم $\overline{AC}$ هو ارتفاع المثلث.

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(8 \times -3) + (9 \times -1) + (-22)|}{\sqrt{64 + 81}} = \frac{55}{\sqrt{145}}$$ وحدة طول

يمثل ارتفاع المثلث (BD)

$\overline{AC}$ طول $= \sqrt{(6 + 2)^2 + (-4 - 5)^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$ وحدة طول

مساحة المثلث ABC $= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

ABC

المساحة $= \frac{1}{2} \times \sqrt{145} \times \frac{55}{\sqrt{145}} = \frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

اسئلة حلول الفصل السادس

س1/ مستقيم ميله $\frac{3}{4}$ ويمر بالنقطة A(1,2) جد احداثي نقطة B تنتمي للمستقيم نفسه وتبعد عن A بمقدار (5) وحدات.

س2/ لتكن A(−2,−2) , B(4,4) , C(2,6) رؤوس مثلث. احسب مساحة المثلث الذي رؤوسه منتصفات اضلاع المثلث ABC

س3/ اذا كان بعد المستقيم $3x - 4y - c = 0$ عن نقطة الاصل يساوي بعد المستقيم $5x + 12y - 2c - 6 = 0$ عن نقطة الاصل فما قيمة C

الفصل السابع

الاحصـــــــــــاء

[2 – 7] الوسط الحسابي Arithmatic Mean

مقاييس النزعة المركزية / هي مقاييس عددية تستخدم لقياس موضع تجمع البيانات. ومن خصائص البيانات ان لها نزعة أو ميل تتركز حول قيمة معينة متوسطة.

ومن اهم مقاييس النزعة المركزية

1- الوسط الحسابي
2- الوسيط
3- المنوال

تعريف [1 – 7]

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بانه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الاصلية. وبالتالي فان الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها.

طريقة حسابه /

الطريقة الاولى

(1) اذا كانت المعلومات الاحصائية (البيانات) غير مبوبة :

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ وبالرموز : $\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_n}{n}$

مثال1/ اذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي : 12,11,9,8,5 سنة

احسب الوسط الحسابي لاعمار هؤلاء الاشخاص.

الحل / $\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_n}{n} = \frac{12+11+9+8+5}{5} = \frac{45}{5} = 9$ سنوات

---

(2) اذا كانت البيانات مبوبة :

اذا كانت القيم الاحصائية متجمعة في توزيع تكراري فيمكن استخدام القانون الاتي :

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$$\bar{X} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \dots\dots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots\dots + f_n}$$

مثال2/ لنفرض وجود (3) اشخاص عمر كل منهم (8) سنوات , و (5) اشخاص عمر كل منهم (9) سنوات , و (4) اشخاص عمر كل منهم (11) سنة , وشخصين عمر كل منهم (12) سنة كما في الجدول الاتي :

العمر	8	9	11	12
عدد الاشخاص	3	5	4	2

(هذا الجدول من دون فئات) فيكون العدد (العمر) هو الذي يمثل مركز الفئة , احسب الوسط الحسابي للعمر

الحل / اذا زمزنا للعمر بالرمز x ولعدد الاشخاص او التكرار بالرمز f فان خطوات الحل يمكن تبسيطها كما في الجدول التالي :

العمر (x)	التكرار (f)	العمر × التكرار (x f)
8	3	8 x 3 = 24
9	5	9 x 5 = 45
11	4	11 x 4 = 44
12	2	12 x 2 = 24
المجموع	14	137

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} \rightarrow \therefore \bar{x} = \frac{137}{14}$$

9.786 = سنة الوسط الحسابي للعمر .

ولنتقدم خطوة اخرى وناخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات .

مثال3/ الجدول التالي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكليوغرام . والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن ؟

فئات الوزن	– 30	– 40	– 50	– 60	– 70	90 – 80	المجموع
عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100

الحل/ نجد مركز الفئة (X) : مركز الفئة الاولى - $\frac{30 + 40}{2} = 35$

مركز الفئة الثانية = 35 + 10 = 45 .... وهكذا

وبالتالي فان خطوات الحل هي :

(1) حساب مراكز الفئات ونرمز لها (x) (2) نضرب مركز الفئة (x) في تكرارها (f)

(3) نجد الوسط الحسابي من العلاقة :
$$\bar{X} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + \dots\dots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots\dots + f_n}$$

فئات الوزن	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
30 –	9	35	315
40 –	15	45	675
50 –	22	55	1210
60 –	25	65	1625
70 –	18	75	1350
80 – 90	11	85	935
المجموع	100		6110

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

$$\bar{X} = \frac{6110}{100}$$

$$\bar{X} = 61.1$$

مثال4/ جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الاتي :

الفئات	8 –	10 –	12 –	14 –	16 –	18 – 20	المجموع
التكرار	5	15	20	10	6	4	60

الحل/

الفئات	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
8 –	5	9	45
10 –	15	11	165
12 –	20	13	260
14 –	10	15	150
16 –	6	17	102
18 – 20	4	19	76
المجموع	60		798

$\bar{X} = \frac{798}{60} \Rightarrow \bar{X} = 13.3$ الوسط الحسابي

الطريقة الثانية

طريقة الوسط الفرضي او الانحرافات /

تعتمد هذه الطريقة على اختيار احدى القيم (مراكز الفئات) بوصفها وسطا فرضيا ثم ايجاد انحراف كل فئة عن ذلك الوسط الفرضي ومن ثم نطبق القانون :

الوسط الحسابي = الوسط الفرضي + $\frac{\text{(انحراف مركز فئة في تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

$\bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\sum f . E}{\sum f}$ حيث الوسط الفرضي = $\bar{X}_0$

f = تكرار الفئة , $E = X - \bar{X}_0$ الانحراف $\sum f$ = مجموع التكرارت

مثال5/ الجدول التكراري التالي يبين اعمار (100) طالب جامعي .

اوجد الوسط الحسابي للاعمار بطريقة الوسط الفرضي .

الحل /

(1) نستخرج مراكز الفئات .

(2) نختار الوسط الفرضي ($\bar{X}_0$) من بين مراكز الفئات وليكن (21) الذي يقابل اكبر تكرار .

(3) نستخرج انحرف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي (الانحراف= مركز الفئة – الوسط الفرضي)

$E = X - \bar{X}_0$

(4) نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة (f) × انحراف مركزها عن الوسط الفرضي .

(5) نستخرج المجموع الكلي للتكرارات والمجموع الكلي $\sum$(f.E) , نكتب المعلومات السابقة في جدول كالاتي :

الاعمار للفئات	عدد الطلاب (f) التكرار	مركز الفئة (X)	الانحراف $E = X - \bar{X}_0$	f.E
18 –	20	19	19 – 21 = – 2	20 x –2 =– 40
20 –	44	$21 = \bar{X}$	21 – 21 = 0	44 x 0 = 0
22 –	18	23	23 – 21 = 2	18 x 2 = 36
24 –	13	25	25 – 21 = 4	13 x 4 = 52
26 –	3	27	27 – 21 = 6	3 x 6 = 18
28 – 30	2	29	29 – 21 = 8	2 x 8 = 16
المجموع	100			82

$$\bar{X} = \bar{X}_0 + \frac{\sum f.E}{\sum f} \Rightarrow \bar{X} = 21 + \frac{82}{100} = 21 + 0.82$$

الوسط الحسابي للاعمار $\bar{X} = 21.82$

مزايا الوسط الحسابي وعيوبه /

المزايا

(1) يتميز بعملياته الحسابية البسيطة.

(2) تدخل جميع القيم في حسابه.

العيوب

(1) يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة الكبيرة جدا او الصغيرة جدا.

(2) لا يمكن حسابه حسابا بيانيا .

[3 – 7] الوسيط Median

تعريف [2 – 7]

> يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا وبالتالي فان عدد القيم الاصغر منه يكون مساويا للقيم الاكبر منه.

طريقة حساب الوسيط /

(1) البيانات غير المبوبة :

نرتب القيم ترتيبا تصاعديا او تنازليا ثم نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط هذا بفرض ان عدد القيم فردي.

اما اذا كان عدد القم زوجي فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوما على اثنين.

مثال6/ احسب الوسيط لاوزان بعض الطلاب والتي هي : (52) كغم, (58) كغم , (50) كغم , (63) كغم , (55) كغم.

الحل / نرتب القيم تصاعديا 50,52,<u>55</u>,58,63 نلاحظ ان القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في الترتيب

∴ الوسيط = 55

مثال6/ احسب الوسيط للاوزان التالية لبعض الطلاب : (52) كغم , (58) كغم , (50) كغم , (63) كغم , (57) كغم , (55) كغم.

الحل /

نرتب القيم تصاعديا :

50 , 52 , <u>55</u> , <u>57</u> , 58 , 63

ترتيب الاول = $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (الثالث)

ترتيب الثاني = $\frac{n}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$ (الرابع)

∴ الوسيط = $\frac{\text{الثالث} + \text{الرابع}}{2}$

نلاحظ وجود قيمتن في المنتصف ويكون $= \frac{57 + 55}{2} = 56$

(2) في البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات : وتكون خطوات الحل كما يأتي

(1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري.

(2) حساب ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموعة التكرار}}{2}$

(3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسيطية وهي الفئة التي تقابل اول تكرار اكبر او يساوي ترتيب الوسيط.

ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية

الوسيط = الحد الادنى للفئة الوسطية + $\frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}}$ × طول الفئة

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} \cdot W$$

حيث الوسيط = ME , fb التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية ,
fm : تكرار الفئة الوسيطية , W : طول الفئة , L : الحد الادنى للفئة الوسيطية.

مثال8/ جد وسيط الوزن من الجدول التالي :

الحل /

فئات الوزن	التكرار عدد الاشخاص	التكرار المجتمع الصاعد
30 –	9	9 +
40 –	15	24
الفئة قبل الوسيطية 50 –	+ 22	fb 46
L الفئة الوسيطية 60 –	+ 25 fm	71
70 –	+ 18	89
80 – 90	+ 11	100
المجموع	100	

ترتيب الوسيط $50 = \frac{100}{2} = (\frac{\sum f}{2})$ الفئة الوسيطية $10 = 70 - 60 = (W)$

الحد الادنى للفئة الوسيطية $60 = (L)$ تكرار الفئة الوسيطية $25 = (fm)$

التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية $46 = (fb)$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} \cdot W$$

$$ME = 60 + \frac{50 - 46}{25} \times 10$$

$$ME = 60 + \frac{8}{5} \rightarrow ME = 60 + 1.6 = 61.6$$

مزايا الوسيط وعيوبه /

المزايا

(1) لايتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة.
(2) يمكن حسابه حسابا بيانيا.

العيوب

(1) لاتدخذ جميع القيم في حسابه.
(2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية.

[4 – 7] المنوال Mode

تعريف [3 – 7]

يعرف المنوال لمجموعة من القيم بأنه القيمة الاكثر تكرارا او التي تقابل اكبر التكرارات .
ويرمز له MO

طريقة حساب المنوال /

(1) البيانات غير المبوبة :

مثال9/ ماهي القيمة المنوالية لمجموعة الاعداد الاتية :

(أ) 4,2,4,7,8,3,4,9,7,4

الحل /

المنوال = 4 لانها تكررت اكثر من غيرها .

(ب) 18,10,5,6,8,1,5,6

الحل /

المنوال = 5 , 6 لانهما تكررا اكثر من غيرهما

(جـ) 12,11,10,7,3,4,5,8 الحل / المنوال = لايوجد

(2) البيانات المبوبة :

أ– طريقة الفروق (طريقة بيرسون)

$$\text{المنوال} = \text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول الفئة المنوالية}$$

حيث d_1 = تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة التي قبلها

d_2 = تكرار الفئة المنوالية – تكرار الفئة التي بعدها

وان التكرار المنوالي هو اكبر تكرار في الجدول التكراري . والفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار

مثال10/ احسب المنوال من الجدول التالي :

فئات	التكرار	
– 30	9	
– 40	15	
– 50	22	التكرار السابق ←
– 60	25	التكرار المنوالي ←
– 70	18	التكرار اللاحق ←
80 – 90	11	

الحل /

$d_1 = 25 - 22 = 3$

$d_2 = 25 - 18 = 7$

طول الفئة المنوالية = 60 – 70 = 10

المنوال =

$$\text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times \text{طول الفئة}$$

$$\text{المنوال} = 60 + \frac{3}{3+7} \times 10$$

المنوال = 3 + 60 = 63

ب – طريقة العزوم (الرافعة)

(1) في هذه الطريقة نرسم عتلة ونجعل تكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند احدى نهايتي العتلة. والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند النهاية الاخرى للعتلة وطول العتلة = طول الفئة

(2) نفرض نقطة الارتكاز التي تمثل بعد المنوال عند احد الطرفين = x

(3) نطبق قانون العتلة (القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها) .

(4) نستخرج قيمة x ونضيفها الى الحد الادنى للفئة المنوالية فنحصل على المنوال .

مثال 11/ جد المنوال من الجدول الاتي :

الفئات	40 -	50 -	60 -	70 -	80 -	90 - 100
التكرار	6	38	59	37	8	2

الحل /

الفئة المنوالية = (60 – 70)

طول العتلة = طول الفئة = 10

∵ القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

$$(10 - X)(37) = x(38)$$

$$370 - 37X = 38X$$

$$75X = 370$$

∴ $x = \frac{370}{75} = 4.9$

∴ المنوال = 60 + 4.9 = 64.9

طول العتلة = طول الفئة = 10

X | ▲ الارتكاز | 10 – X

تكرار الفئة قبل المنوالية = 38

تكرار الفئة بعد المنوالية = 37

مزايا المنوال وعيوبه /

المزايا

(1) بسيط في طريقة حسابه.

(2) لايتأثر بالقيم الشاذة والتطرفة.

العيوب

(1) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية

(2) لايمكن ايجاده في حالة عدم وجود قيم متكررة اكثر من غيرها .

(3) قد يوجد اكثر من منوال في حالة تكرار القيم بنفس الدرجة .

حلول تمارين (1 - 7)

س1/ عرف الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

الحل /

الوسط الحسابي : القيمة التي لو حلت مكان قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الاصلية
(الوسط الحسابي هو مجموع القيم مقسوما على عددها) ويرمز له $\bar{X}$

الوسيط : هو القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا او تنازليا ويرمز له (ME) .

المنوال : هي القيمة الاكثر تكرارا او التي تقابل اكبر التكرارات ويرمز له (MO) .

س2/ البيانات التالية تمثل اعمار مجموعة من الطلاب :

19,17,18,15,18,17,16,17,15

جد كلا مماياتي :

(أ) الوسط الحسابي

الحل /

$$\bar{X} = \frac{19 + 17 + 18 + 17 + 15 + 18 + 16 + 17 + 15}{9}$$

$$\bar{X} = \frac{152}{9} = 16.88$$ الوسط الحسابي

(ب) الوسيط

الحل /

ترتيب الاعمار تصاعديا بدون تكرار

15 , 16 , (17) , 18 , 19

(17) هو الوسيط للاعمار

(جـ) المنوال

المنوال = (17) اكثر الاعمار تكرارا

س3/ اذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة اشخاص (40000) دينار فما مجموع دخولها ؟

الحل / $\bar{X} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ ، $40000 = \frac{\text{مجموع القيم}}{5}$

(مجموع دخول خمسة اشخاص) دينار $200000 = 5 \times 40000$ = مجموع القيم (مجموع الدخول)

س4/ الجدول التالي يبين توزيع درجات الحرارة في احدى المدن خلال (90) يوما في فصل الصيف في احد الاعوام.

فئات درجات الحرارة	20 –	24 –	28 –	32 –	36 –	40 –	44 – 48	المجموع
عدد الايام	8	10	18	23	15	9	7	90

(أ) حساب الوسط الحسابي لدرجات الحرارة.

(ب) حساب قيمة الوسيط.

(جـ) حساب قيمة المنوال.

الحل /

فئات درجات الحرارة	f عدد الايام	مركز الفئة x	$x \cdot f$	التكرار المتجمع الصاعد
20 –	8	22	176	8
24 –	10	26	260	18
28 –	18	30	540	36 fb
32 –	23 fm	34	782	59
36 –	15	38	570	74
40 –	9	42	378	83
44 – 48	7	46	322	90
المجموع	90		3028	

(أ) الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{\sum x.f}{\sum f} = \frac{3028}{90} = 33.64$

(ب) طول الفئة $W = 36 - 32 = 4$

الحد الادنى للفئة الوسيطية $32 = (L)$ تكرار الفئة الوسيطية $23 = (fm)$

التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية $36 = (fb)$

ترتيب الوسيط $= \frac{\sum f}{2} = \frac{90}{2} = 45$

$$ME = L + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - fb}{fm} \times W$$

الوسيط $ME = 32 + \frac{45 - 36}{23} \times 4 = 33.6$

(جـ) $d_2 = 23 - 15 = 8$ $d_1 = 23 - 18 = 5$

المنوال $MO = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times W \rightarrow MO = 32 + \frac{5}{5+8} \times 4 = 33.6$

س5/ الجدول الاتي يبين رواتب (60) معلم في مدرسة والمطلوب ايجاد الوسيط لهذه الرواتب.

الرواتب بالالف دينار	150 –	160 –	170 –	180 –	190 –	200 – 210
عدد المعلمين	5	10	15	20	7	3

الحل /

الرواتب	عدد المعلمين f	التكرار المتجمع الصاعد
150 –	5	5
160 –	10	15
170 –	15	(30) fb
L / الفئة الوسيطية – 180	(20) fm	50
190 –	7	57
200 – 210	3	60
المجموع	60	

$\frac{\sum f}{2} = \frac{60}{2} = 30$ = ترتيب الوسيط

$W = 180 - 170 = 10$ طول الفئة

$L = 180$ الحد الادنى للفئة الوسيطية

$ME = 180 + \frac{30 - 30}{20} \times 10$ الوسيط

$ME = 180$ الوسيط

س6/ الجدول التالي يبين الارباح اليومية لمجموعة من المحلات في احدى المدن جد الوسط الحسابي (معدل الربح اليومي) لهذه الارباح ؟

الربح اليومي بالالف دينار	4 –	8 –	12 –	16 –	20 –	24 – 28
عدد المحلات	8	10	15	20	12	6

الحل /

فئات الربح	عدد المحلات f	مركز الفئة x	f . x
4 –	8	6	48
8 –	10	10	100
12 –	15	14	210
16 –	20	18	360
20 –	12	22	264
24 – 28	6	26	165
المجموع	71		1138

$\bar{X} = \frac{\sum x.f}{\sum f}$

$\bar{X} = \frac{1138}{71} = 16.03$ الف دينار الوسط الحسابي

[5 - 7] مقاييس التشتت Measures of Varation

ان لكل مجموعة من الاعداد وسطا حسابيا , وان اعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منه او مبتعدة عنه . فاذا كانت هذه الاعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل , واذا كانت هذه الاعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير

مثلا : ان الوسط الحسابي للاعداد 70,60,50,40,30 هو 50

والوسط الحسابي للاعداد : 30,100,90,20,10 هو 50

عند تأمل المجموعة الاولى تشاهد ان تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل بينما تتشت اعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير .

مقاييس التشتت / ان مقاييس التشتت التي سوف ندرسها هي :

(1) المدى Range .

(2) الانحراف المعياري Standard Deviation .

[1 - 5 - 7] المدى

هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة للمتغير +1

والمدى ليس ذات مقياس مهم للتشتت لانه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير . وهما اقل قيمة واكبر قيمة للمتغير , ولذا فهو يتأثر تأثرا بالغا بذبذبات العينة وان أي تغير يحدث في أي من هاتين القيميتن يؤثر بوضوح في قيمة المدى .

أ – البيانات غير المرغوبة

مثال12/ ماهو المدى في مجموعة القيم التالية : 98,24,68,35,12

الحل / $R = 98 - 12 + 1 = 87$ (المدى)

ب – البيانات المرغوبة

مثال13/ ماهو المدى في التوزيع التكراري التالي :

الفئات	5 –	15 –	25 –	35 –	45 – 55
التكرار	3	8	15	14	7

الحل / المدى = الحد الاعلى للفئة الاخيرة – الحد الادنى للفئة الاولى + 1

$R = 55 - 5 + 1 = 51$ (المدى) ∴

[2 - 5 - 7] الانحراف المعياري

يعد الانحراف المعياري من اكثر مقاييس التشتت استخداما . فاذا كانت لدينا n من المفردات $x_1, x_2, ..., x_n$ ووسطها الحسابي $\bar{X}$. فان هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها اذا كانت قريبة من وسطها الحسابي $\bar{X}$

أي اذا كانت انحرافاتها عن $\bar{X}$ صغيرة $x_1, x_2, ...,$, وبالتالي فان انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت . ويمكن ان يتم ذلك بأخذ متوسط هذه الانحرافات .

تعريف [4 – 7]

الانحراف المعياري : هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (s) .

حساب الانحراف المعياري لقيم غير مبوبة : $S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$

مثال14/ احسب الانحراف المعياري للقيم الاتية : 9,7,5,3,1

الحل /

x	x^2
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
المجموع 25	165

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - 25} = \sqrt{33 - 25}$$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .... الانحراف المعياري

ملاحظة / عند طرح كمية ثابتة من جميع القيم , لاتؤثر على قيمة الانحراف المعياري والمثال (15) يوضح ذلك :

مثال15/ اطرح 1 من الاعداد 9,7,5,3,1 ثم احسب الانحراف المعياري للقيم الجديدة . قارن النتيجة مع مثال (14) ماذا تلاحظ ؟

الحل /

x	x^2
0	0
2	4
4	16
6	36
8	64
المجموع 20	120

الاعداد 9,7,5,3,1

اطرح 1 : 8,6,4,2,0

$$\bar{X} = \frac{8 + 6 + 4 + 2 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{120}{5} - 16} = \sqrt{24 - 16}$$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ... الانحراف المعياري

نلاحظ نفس الانحراف المعياري للاعداد قبل طرح (1) كما في المثال (14)

الدرجة المعيارية Standard Degree /

تعريف [4 – 7]

الدرجة المعيارية : تعرف الدرجة المعيارية بأنها خارج قسمة انحراف قيمة ذلك المتغير عن الوسط الحسابي لتلك المجموعة على الانحراف المعياري لها .

أي انه الدرجة المعيارية : $SD = \frac{X - \bar{X}}{S}$

[3 – 5 – 7] الارتباط Correlation

تعريف [5 – 7]

الارتباط : هو العلاقة الرياضية بين متغيرين , بحيث اذا تغير احدهما باتجاه معين يميل الاخر الى التغيير في اتجاه معين ايضا , فاذا كان التغير باتجاه واحد سمي الارتباط طرديا , اما اذا كان التغير باتجاهين متعاكسين سمي الارتباط عكسيا .

معامل الارتباط Correlation Cofficient (r) بين المتغيرين x,y :

نحسب معامل الارتباط : r حيث $r = \frac{\frac{\sum x y}{n} - \bar{x}\bar{y}}{S_x S_y}$

حيث $\bar{x}$ = الوسط الحسابي للمتغير x

$\bar{y}$ = الوسط الحسابي للمتغير y

S_x = الانحراف المعياري للمتغير x

S_y = الانحراف المعياري للمتغير x

بعض خصائص (r) :

(1) r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب)

(2) r=1 في حالة الارتباط الطردي التام .

(3) r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب)

(4) r = -1 في حالة الارتباط العكسي التام .

(5) r = 0 في حالة انعدام الارتباط .

يلاحظ مما سبق ان قيمة معامل الارتباط تنتمي [1 , 1 -] وكلما اقتربت قيمة r من 1+ أو 1- كان هذا دليلا على قوة الارتباط بين المتغيرين وكلما اقتربت قيمته من الصفر كان هذا دليلا على انعدام الارتباط .

مثال16/ جد معامل الارتباط بين المتغيرين x,y اذا كان :

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

ثم بين نوعه ؟

الحل /

x	y	x^2	y^2	xy
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
15	30	55	220	110
				المجموع

$$\bar{X} = \frac{15}{5} = 3 \quad , \quad \bar{Y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{55}{5} - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{220}{5} - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{S_x\ S_y} = \frac{\frac{110}{5} - (3)(6)}{(\sqrt{2})(2\sqrt{2})}$$

$$r = \frac{22 - 18}{4} = \frac{4}{4} = +1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام

حلول تمارين (2 – 7)

س1/ اوجد المدى للقيم التالية 3,0,8,7,9,12

الحل /

(أ) المدى = اكبر قيمة – اصغر قيمة + 1

المدى = 12 – 0 + 1 = 13

(ب) المدى = 32 – 20 + 1 = 13

س2/ احسب الانحراف المعياري للقيم التالية 10,8,6,4,2

الحل /

x	x^2
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100
$\sum x = 30$	$\sum x^2 = 220$

الوسط الحسابي $\bar{X} = \frac{30}{5} = 6$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{220}{5} - (6)^2}$$

$$S = \sqrt{44 - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

س3/ اوجد الانحراف المعياري للاعداد 5,7,1,2,6,3 ثم اضف (5) الى كل عدد منها واثبت ان هذه الاضافة لاتؤثر على قيمة الانحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي .

الحل/

بعد الاضافة

$$\bar{X} = \frac{54}{6} = 9$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{514}{6} - 81}$$

$$S_x = \sqrt{58.6 - 81}$$

$$S_x = \sqrt{4.7}$$

$$S_x = 2.17$$

الانحراف المعياري بعد الاضافة

x	x^2
8	64
11	121
7	49
6	36
12	144
10	100
54	514
المجموع	

قبل الاضافة

$$\bar{X} = \frac{24}{6} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{X})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{124}{6} - 81}$$

$$S_x = \sqrt{20.7 - 16}$$

$$S_x = \sqrt{4.7}$$

$$S_x = 2.17$$

الانحراف المعياري قبل الاضافة

x	x^2
3	9
6	36
2	4
1	1
7	49
5	25
24	124
المجموع	

الانحراف المعياري في الحالتين متساوي اما الوسط الحسابي فهو مختلف ففي الاولى = (4) وفي الثانية = (9)

الاضافة تؤثر على الوسط الحسابي ولاتؤثر على الانحراف المعياري

س4/ جد معامل الارتباط بين قيم الظاهرتين (x,y) من البيانات :

X	1	2	3
y	2	4	6

الحل /

$$\bar{X} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\bar{Y} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{14}{3} - (2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{56}{3} - (4)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

x	y	x^2	y^2	xy
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
المجموع		14	56	28

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy) - (\bar{x}\bar{y})}{S_x\ S_y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \times 28 - (2 \times 4)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{28 - 24}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}$$

$$r = \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$$

∴ الارتباط طردي تام

س5/ في الجدول المبين في السؤال الاول لوضرب قيم الظاهرة x في 4 نحصل على جدول اخر وهو :

X	4	8	12
y	2	4	6

الحل /

$$\bar{X} = \frac{24}{3} = 8$$

$$\bar{Y} = \frac{12}{3} = 4$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{224}{3} - (8)^2}$$

$$S_x = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - \bar{y}^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{56}{3} - (4)^2}$$

$$S_y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(xy) - (\bar{x}\bar{y})}{S_x\ S_y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{3} \times 112 - (4 \times 8)}{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

$$r = \frac{\frac{112 - 96}{3}}{\frac{16}{3}}$$

∴ الارتباط طردي تام

$$r = \frac{16}{3} \times \frac{3}{16} = 1$$

	x	y	x^2	y^2	xy
	4	2	16	4	8
	8	4	64	16	32
	12	6	144	36	72
المجموع	24	12	224	56	112

س6/ جد معامل الارتباط بين المتغيرين x,y ثم بين نوعه

x	-13	-9	-5	-1	3
y	+3	1	-1	-3	-5

الحل /

x	y	x^2	y^2	xy	
-13	3	169	9	-39	
-9	1	81	1	- 9	
-5	-1	25	1	5	
-1	-3	1	9	3	
3	-5	9	25	-15	
-25	-5	285	45	-55	المجموع

$$\overline{x} = \frac{-25}{5} = -5 \quad , \quad \overline{y} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{X})^2} = \sqrt{\frac{285}{5} - 25}$$

$$= \sqrt{57 - 25} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\overline{y})^2} = \sqrt{\frac{45}{5} - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum(xy)}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x \, S_y} = \frac{\frac{-55}{5} - (-5)(-1)}{4\sqrt{2} \, . \, 2\sqrt{2}} = \frac{-11 - 5}{16}$$

$$r = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\therefore r = -1$$

∴ الارتباط عكسي تام